

⇒ Zu jedem Zustand freier Elektronen und Positionen gibt es daher einen paritätstransformierten, in dem alle Impulse umgekehrt sind, alle Spins ungeändert, und für jedes Position ein Faktor (-1) hinzugefügt ist.

Sowohl ψ als auch ψ' erfüllen die DE. Durch Beobachtungen an einem System freier Elektronen und Positionen können wir daher im Rahmen der Dirac-Theorie ein räumliches kartesisches Recht von einem Linkssystem nicht unterscheiden.

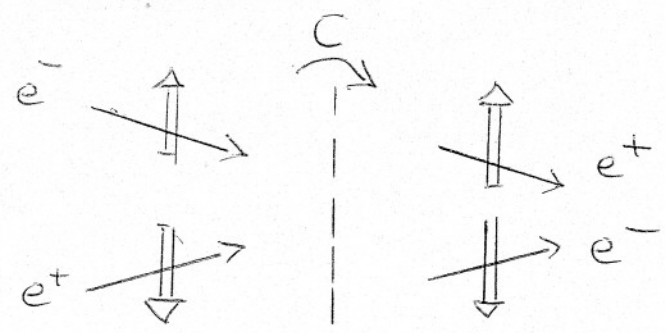
Diese Äquivalenz wird in der Natur erst durch die paritätsverletzende schwache Wechselwirkung aufgehoben. (Entdeckung der Paritätsverletzung: C. S. Wu et al. 1956/7).

5.3 Ladungskonjugations-Transformation C

Findet ein Beobachter, der die Rolle von Elektronen und Positionen vertauscht, andere Naturgesetze für die freien Teilchen?

(Nein: Im Rahmen der Dirac-Theorie ist es reine Konvention, was Elektron/Position genannt wird).

Wir suchen zunächst nach einer Transformation der DE, die ψ und $\bar{\psi}$ vertauscht ($\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ Dirac-adjungiertes Spinor)



Elektronen werden gegen Positronen vertauscht, Spin- und Impulsvariable unverändert gelassen.

Aus der DE für ψ

ψ : vernichtet Elektronen, erzeugt Positronen
 $\bar{\psi}$: " " " " " " " "

$$[-i\gamma^\mu \partial_\mu + m] \psi(x) = 0$$

folgt die DE für den Dirac-adjungierten Spinor $\bar{\psi}$

$$[-i(-\gamma^\mu)^T \partial_\mu + m] \bar{\psi}^T(x) = 0 ; (-\gamma^\mu)^T \text{ erfüllt die Antivertauschungsregeln.}$$

(Mit den Matrixrelationen (Aufgabe: Prüfen durch Einsetzen))

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

$$\bar{M} = \gamma^0 M^\dagger \gamma^0 ; \gamma^0 = \gamma^{0\dagger}, \gamma^0 \gamma^0 = \mathbb{1} ; \gamma^j = (-\gamma^{j\dagger})^\dagger$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$$\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{M_1 M_2} = \bar{M}_2 \cdot \bar{M}_1$$

$$(\bar{\psi}_1 M \psi_2)^* = \bar{\psi}_2 \bar{M} \psi_1$$

$$\overline{\mathbb{1}} = \mathbb{1} ; \overline{\gamma^\mu} = \gamma^\mu$$

Wie bei der Paritäts Transformation erwarten wir bei Ladungskonjugation eine Äquivalenztransformation der Gestalt

$$S^{-1}(C) \gamma^\mu S(C) = (-\gamma^\mu)^T, \text{ jetzt jedoch für die transponierten } \gamma^\mu.$$

Das ist der Fall für

$$S(C) = i\gamma^2 \gamma^0$$

aus der DE für $\bar{\psi}^T$ folgt dann

$$S^{-1}(C) [-i\gamma^\mu \partial_\mu + m] S(C) \bar{\psi}^T(x) = 0$$

und der ladungskonjugierte Spinor

$$\psi^c(x) = S(C) \bar{\psi}^T(x)$$

erfüllt die DE,

$$[-i\gamma^\mu \partial_\mu + m] \psi^c(x) = 0,$$

und dieselben Antikommutationsregeln wie $\psi(x)$ (Nachprüfen durch Einsetzen).

Bei der Ladungskonjugations-Transformation werden Elektronen mit Positronen vertauscht, Impuls- und Spinvariable unverändert gelassen.

Die C-Invarianz ist in der Natur wie die P-Invarianz durch die schwache Wechselwirkung gebrochen.

Auch die CP-Invarianz ist gebrochen:

J. Cronin, V. Fitch, Christenson, Twlay 1964 (NP Cronin/Fitch 1980)

J.H. Christenson, J.W. Cronin, V.L. Fitch, R. Twlay (Princeton Univ.):
Phys. Rev. Lett. 13, 138 (1964): Evidence for the τ Decay of the K_2^0 Meson.

EVIDENCE FOR THE 2π DECAY OF THE K_2^0 MESON*†

J. H. Christenson, J. W. Cronin,† V. L. Fitch,† and R. Turlay‡

Princeton University, Princeton, New Jersey

(Received 10 July 1964)

This Letter reports the results of experimental studies designed to search for the 2π decay of the K_2^0 meson. Several previous experiments have served^{1,2} to set an upper limit of 1/300 for the fraction of K_2^0 's which decay into two charged pions. The present experiment, using spark chamber techniques, proposed to extend this limit.

In this measurement, K_2^0 mesons were produced at the Brookhaven AGS in an internal Be target bombarded by 30-BeV protons. A neutral beam was defined at 30 degrees relative to the circulating protons by a $1\frac{1}{2}$ -in. \times $1\frac{1}{2}$ -in. \times 48-in. collimator at an average distance of 14.5 ft. from the internal target. This collimator was followed by a sweeping magnet of 512 kG-in. at ~20 ft. and a 6-in. \times 6-in. \times 48-in. collimator at 55 ft. A $1\frac{1}{2}$ -in. thickness of Pb was placed in front of the first collimator to attenuate the gamma rays in the beam.

The experimental layout is shown in relation to the beam in Fig. 1. The detector for the decay products consisted of two spectrometers each composed of two spark chambers for track delineation separated by a magnetic field of 178 kG-in. The axis of each spectrometer was in the horizontal plane and each subtended an average solid angle of 0.7×10^{-2} steradians. The spark chambers were triggered on a coincidence between water Cherenkov and scintillation counters positioned immediately behind the spectrometers. When coherent K_1^0 regeneration in solid materials was being studied, an anticoincidence counter was placed immediately behind the regenerator. To minimize interactions K_2^0 decays were observed from a volume of He gas at nearly STP.

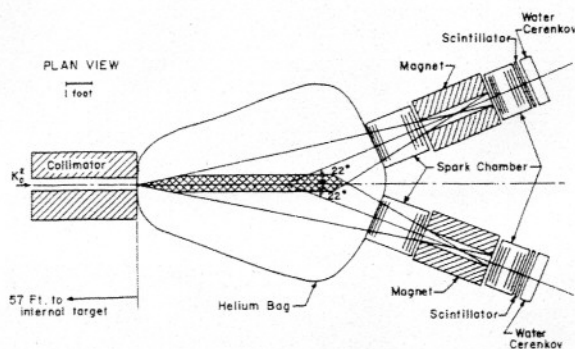


FIG. 1. Plan view of the detector arrangement.

The analysis program computed the vector momentum of each charged particle observed in the decay and the invariant mass, m^* , assuming each charged particle had the mass of the charged pion. In this detector the K_{e3} decay leads to a distribution in m^* ranging from 280 MeV to ~536 MeV; the $K_{\mu 3}$, from 280 to ~516; and the $K_{\pi 3}$, from 280 to 363 MeV. We emphasize that m^* equal to the K^0 mass is not a preferred result when the three-body decays are analyzed in this way. In addition, the vector sum of the two momenta and the angle, θ , between it and the direction of the K_2^0 beam were determined. This angle should be zero for two-body decay and is, in general, different from zero for three-body decays.

An important calibration of the apparatus and data reduction system was afforded by observing the decays of K_1^0 mesons produced by coherent regeneration in 43 gm/cm² of tungsten. Since the K_1^0 mesons produced by coherent regeneration have the same momentum and direction as the K_2^0 beam, the K_1^0 decay simulates the direct decay of the K_2^0 into two pions. The regenerator was successively placed at intervals of 11 in. along the region of the beam sensed by the detector to approximate the spatial distribution of the K_2^0 's. The K_1^0 vector momenta peaked about the forward direction with a standard deviation of 3.4 ± 0.3 milliradians. The mass distribution of these events was fitted to a Gaussian with an average mass 498.1 ± 0.4 MeV and standard deviation of 3.6 ± 0.2 MeV. The mean momentum of the K_1^0 decays was found to be 1100 MeV/c. At this momentum the beam region sensed by the detector was 300 K_1^0 decay lengths from the target.

For the K_2^0 decays in He gas, the experimental distribution in m^* is shown in Fig. 2(a). It is compared in the figure with the results of a Monte Carlo calculation which takes into account the nature of the interaction and the form factors involved in the decay, coupled with the detection efficiency of the apparatus. The computed curve shown in Fig. 2(a) is for a vector interaction, form-factor ratio $f^-/f^+ = 0.5$, and relative abundance 0.47, 0.37, and 0.16 for the K_{e3} , $K_{\mu 3}$, and $K_{\pi 3}$, respectively.³ The scalar interaction has been computed as well as the vector interaction

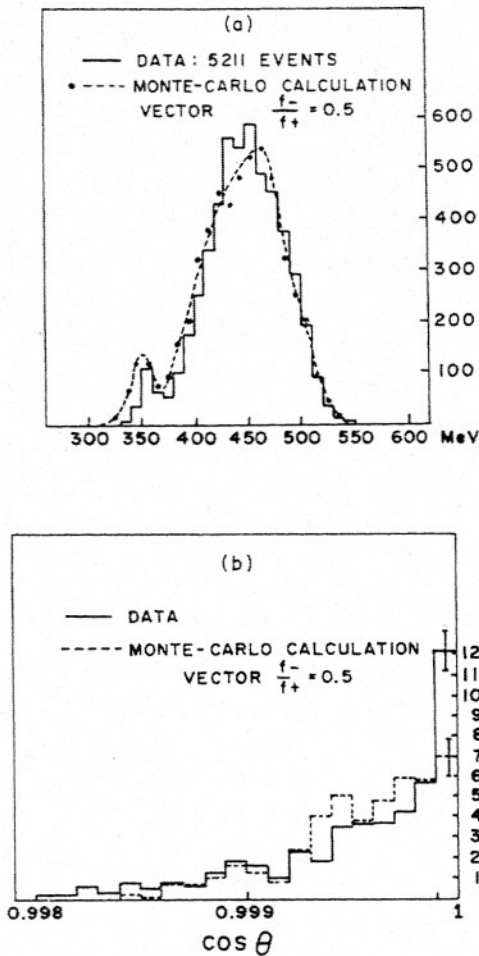


FIG. 2. (a) Experimental distribution in m^* compared with Monte Carlo calculation. The calculated distribution is normalized to the total number of observed events. (b) Angular distribution of those events in the range $490 < m^* < 510$ MeV. The calculated curve is normalized to the number of events in the complete sample.

with a form-factor ratio $f^-/f^+ = -6.6$. The data are not sensitive to the choice of form factors but do discriminate against the scalar interaction.

Figure 2(b) shows the distribution in $\cos \theta$ for those events which fall in the mass range from 490 to 510 MeV together with the corresponding result from the Monte Carlo calculation. Those events within a restricted angular range ($\cos \theta > 0.9995$) were remeasured on a somewhat more precise measuring machine and recomputed using an independent computer program. The results of these two analyses are the same within the respective resolutions. Figure 3 shows the re-

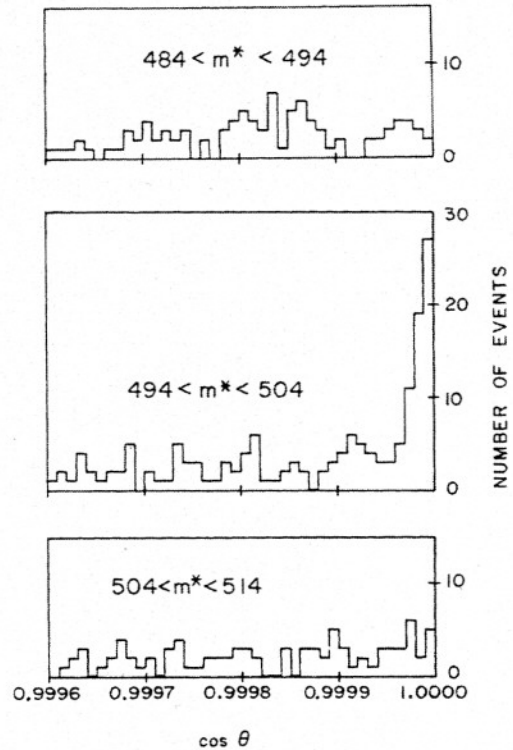


FIG. 3. Angular distribution in three mass ranges for events with $\cos \theta > 0.9995$.

sults from the more accurate measuring machine. The angular distribution from three mass ranges are shown; one above, one below, and one encompassing the mass of the neutral K meson.

The average of the distribution of masses of those events in Fig. 3 with $\cos \theta > 0.99999$ is found to be 499.1 ± 0.8 MeV. A corresponding calculation has been made for the tungsten data resulting in a mean mass of 498.1 ± 0.4 . The difference is 1.0 ± 0.9 MeV. Alternately we may take the mass of the K^0 to be known and compute the mass of the secondaries for two-body decay. Again restricting our attention to those events with $\cos \theta > 0.99999$ and assuming one of the secondaries to be a pion, the mass of the other particle is determined to be 137.4 ± 1.8 . Fitted to a Gaussian shape the forward peak in Fig. 3 has a standard deviation of 4.0 ± 0.7 milliradians to be compared with 3.4 ± 0.3 milliradians for the tungsten. The events from the He gas appear identical with those from the coherent regeneration in tungsten in both mass and angular spread.

The relative efficiency for detection of the three-body K_2^0 decays compared to that for decay to two pions is 0.23. We obtain 45 ± 9 events in

the forward peak after subtraction of background out of a total corrected sample of 22 700 K_2^0 decays.

Data taken with a hydrogen target in the beam also show evidence of a forward peak in the $\cos\theta$ distribution. After subtraction of background, 45 ± 10 events are observed in the forward peak at the K^0 mass. We estimate that ~ 10 events can be expected from coherent regeneration. The number of events remaining (35) is entirely consistent with the decay data when the relative target volumes and integrated beam intensities are taken into account. This number is substantially smaller (by more than a factor of 15) than one would expect on the basis of the data of Adair et al.⁴

We have examined many possibilities which might lead to a pronounced forward peak in the angular distribution at the K^0 mass. These include the following:

(i) K_1^0 coherent regeneration. In the He gas it is computed to be too small by a factor of $\sim 10^6$ to account for the effect observed, assuming reasonable scattering amplitudes. Anomalously large scattering amplitudes would presumably lead to exaggerated effects in liquid H_2 which are not observed. The walls of the He bag are outside the sensitive volume of the detector. The spatial distribution of the forward events is the same as that for the regular K_2^0 decays which eliminates the possibility of regeneration having occurred in the collimator.

(ii) $K_{\mu 3}$ or $K_{e 3}$ decay. A spectrum can be constructed to reproduce the observed data. It requires the preferential emission of the neutrino within a narrow band of energy, ± 4 MeV, centered at 17 ± 2 MeV ($K_{\mu 3}$) or 39 ± 2 MeV ($K_{e 3}$). This must be coupled with an appropriate angular correlation to produce the forward peak. There appears to be no reasonable mechanism which can produce such a spectrum.

(iii) Decay into $\pi^+\pi^-\gamma$. To produce the highly

singular behavior shown in Fig. 3 it would be necessary for the γ ray to have an average energy of less than 1 MeV with the available energy extending to 209 MeV. We know of no physical process which would accomplish this.

We would conclude therefore that K_2^0 decays to two pions with a branching ratio $R = (K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-) / (K_2^0 \rightarrow \text{all charged modes}) = (2.0 \pm 0.4) \times 10^{-3}$ where the error is the standard deviation. As emphasized above, any alternate explanation of the effect requires highly nonphysical behavior of the three-body decays of the K_2^0 . The presence of a two-pion decay mode implies that the K_2^0 meson is not a pure eigenstate of CP . Expressed as $K_2^0 = 2^{-1/2}[(K_0 - \bar{K}_0) + \epsilon(K_0 + \bar{K}_0)]$ then $|\epsilon|^2 \cong R_T \tau_1 \tau_2$ where τ_1 and τ_2 are the K_1^0 and K_2^0 mean lives and R_T is the branching ratio including decay to two π^0 . Using $R_T = \frac{3}{2}R$ and the branching ratio quoted above, $|\epsilon| \cong 2.3 \times 10^{-3}$.

We are grateful for the full cooperation of the staff of the Brookhaven National Laboratory. We wish to thank Alan Clark for one of the computer analysis programs. R. Turlay wishes to thank the Elementary Particles Laboratory at Princeton University for its hospitality.

*Work supported by the U. S. Office of Naval Research.

[†]This work made use of computer facilities supported in part by National Science Foundation grant.

[‡]A. P. Sloan Foundation Fellow.

[§]On leave from Laboratoire de Physique Corpusculaire à Haute Energie, Centre d'Etudes Nucléaires, Saclay, France.

¹M. Bardon, K. Lande, L. M. Lederman, and W. Chinowsky, *Ann. Phys. (N. Y.)* **5**, 156 (1958).

²D. Neagu, E. O. Okonov, N. I. Petrov, A. M. Rosanova, and V. A. Rusakov, *Phys. Rev. Letters* **6**, 552 (1961).

³D. Luers, I. S. Mitra, W. J. Willis, and S. S. Yamamoto, *Phys. Rev.* **133**, B1276 (1964).

⁴R. Adair, W. Chinowsky, R. Crittenden, L. Leipuner, B. Musgrave, and F. Shively, *Phys. Rev.* **132**, 2285 (1963).

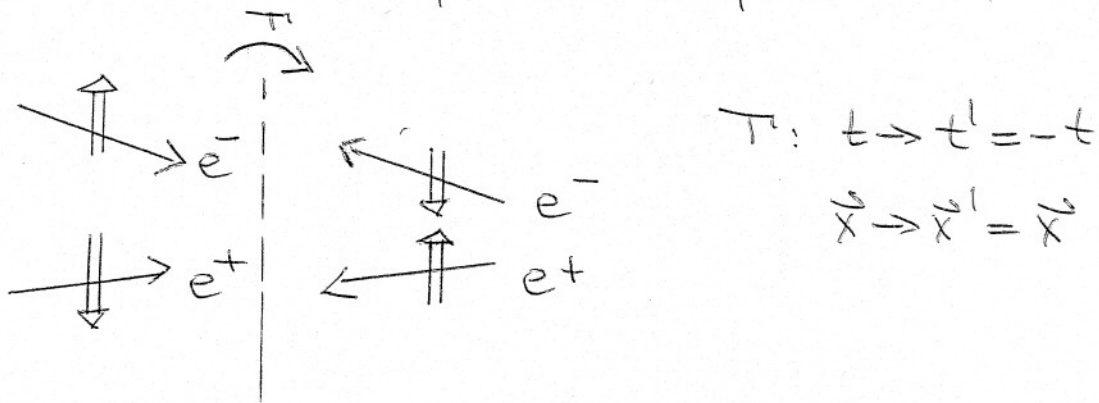
5.4 Zeitumkehr-Transformation T

RR166

lässt sich durch Beobachtung freier Dirac-Teilchen die positive von der negativen Zeitrichtung unterscheiden?

⇒ Nein: freie Dirac-Teilchen zeichnen keine Zeitrichtung aus; lassen sich als einen Dirac-Film freies Elektronen rückwärts laufen, sehen sich aber physikalisch möglichem Zustand.

Die Zeitumkehr-Transformation eines Elektron-Positron-Zustandes dreht Impulse und Spins um:



Der Dirac-Spinor mit umgekehrtem Zeitargument $\psi(\vec{x}, -t)$ erfüllt die Differentialgleichung ($\hbar = c = 1$):

$$[-i(-\gamma^0) \frac{\partial}{\partial t} - i\gamma^i \frac{\partial}{\partial x^i} + m] \psi(\vec{x}, -t) = 0$$

$(t \rightarrow -t) \Rightarrow$ Dirac-Gleichung für $\gamma^0 \rightarrow -\gamma^0$, $\gamma^i \rightarrow \gamma^i$

Mit der Matrix

$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, die bei eigentlichen LT invariant ist und mit allen γ^μ antikommutiert,

$$\gamma^\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma^\mu = 0 \quad \forall \mu = 0, 1, 2, 3$$

In der Standarddarstellung der γ^μ hat γ_5 die Gestalt

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit findet man eine Transformation, die γ^0 in $-\gamma^0$ überführt und γ^i ungeändert lässt,

$$\boxed{S^1 = \gamma_5 \gamma^0} \quad ; \quad S^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad S^{1-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S^{1-1} \gamma^0 S^1 = -\gamma^0 \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\gamma^0$$

$$S^{1-1} \gamma^i S^1 = \gamma^i \quad (\text{analog}) \quad ;$$

\Rightarrow der Spinor

$$\tilde{\psi}(\vec{x}, t) = S^1 \psi(\vec{x}, -t) = \gamma_5 \gamma^0 \psi(\vec{x}, -t)$$

erfüllt die DE (Prüfen durch Einsetzen).

Da die DE auch bei Ladungskonjugation invariant ist, erfüllt auch der Spinor

$$\psi'(\vec{x}, t) = S^1 \psi^c(\vec{x}, -t) = S(C^T) \bar{\psi}^T(\vec{x}, -t) \quad \text{die DE, mit}$$

$$S(C^T) = S^1 \cdot S(C) = \gamma_5 \gamma^0 \cdot i \gamma^2 \gamma^0 = -i \gamma_5 \gamma^2 = i \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix}$$

ψ' wird als zeitumgekehrter Spinor bezeichnet, er erfüllt die Antivertauschungsrelationen.

Es gibt keine unitäre Transformation im Fock-Raum,
die ψ in ψ' überführt; dies liefert jedoch eine
antiunitäre Transformation:

Ein Operator V ist antilinear, wenn \forall Zustände $|a\rangle, |b\rangle$
und \forall komplexen Zahlen $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$V(c_1|a\rangle + c_2|b\rangle) = c_1^* V|a\rangle + c_2^* V|b\rangle.$$

Der hermitesche konjugierte Operator V^\dagger eines antilinearen
Operators V ist definiert als

$$\langle a|V^\dagger|b\rangle = \langle b|V|a\rangle; V^\dagger \text{ ist ebenfalls antilinear.}$$

Ein Operator ist antiunitär, falls er antilinear ist und

$$V^\dagger V = V V^\dagger = \mathbb{1} \text{ erfüllt.}$$

Dann ist $\forall |a\rangle, |b\rangle$ und

$$|a'\rangle = V|a\rangle$$

$$|b'\rangle = V|b\rangle$$

die Relation erfüllt

$$\langle a'|b'\rangle = \langle b|a\rangle = \langle a|b\rangle^*$$

\Rightarrow im Vergleich zu einer unitären Transformation ist
also zusätzlich komplex zu konjugieren (bzw. das
"bra" mit dem "ket" zu vertauschen): Aufangs- und
Endzustände werden vertauscht.

Sei nun V unitar, und A ein beliebiger linearer Operator. Das zu A antunitar transformierte Operator A' ist definiert als

$$A' \equiv (V A V^{-1})^\dagger$$

d.h. gegenüber der unitären Transformation wird zusätzlich hermitesch konjugiert; der Zusammenhang zwischen A und A' wird linear:

für eine beliebige komplexe Zahl $c \in \mathbb{C}$ gilt

$$(c \cdot A)' = c A', \text{ und für die Matrixelemente gilt}$$

$$\langle a | A | b \rangle = \langle b' | A' | a' \rangle \text{ mit den gestrichelten Zuständen wie vorher.}$$

Nun gibt es eine antunitäre Transformation $V(T)$, so dass gilt

$$[V(T) \psi(\vec{x}, t) V^{-1}(T)]^\dagger = \psi^\dagger(\vec{x}, t) = S(T) \bar{\psi}^T(\vec{x}, -t).$$

Sie dreht Impulse und Spin um, und ist eine physikalische Äquivalenztransformation der Zeitumkehr:

Jedem Zustand $|a\rangle$ des ersten Beobachters kann der zweite Beobachter, der die Zeit umgekehrt zählt, den Zustand $|a'\rangle = V(T)|a\rangle$ zuordnen.

Jeder beobachtbaren Größe A kann über zweite Beobachter die Größe A' zueinander,

$$A' = (VAV^{-1})^{\dagger},$$

die aus ψ' genau wie A aus ψ aufgebaut ist.

Für die Erwartungswerte gilt

$$\langle a | A | a \rangle = \langle a' | A | a' \rangle$$

dh. die Erwartungswerte sind in entsprechenden Zuständen identisch \Rightarrow

Für ein freies Dirac-Teilchen gilt daher Zeitumkehr-Invarianz. In der schwachen WW gibt es jedoch T-verletzende Effekte; im $K^0 - \bar{K}^0$ System ist deren experimenteller Nachweis 1998 gelungen.

Stets ist jedoch das Produkt $\Theta = CPT$ in relativistischen Feldtheorien mit beliebiger

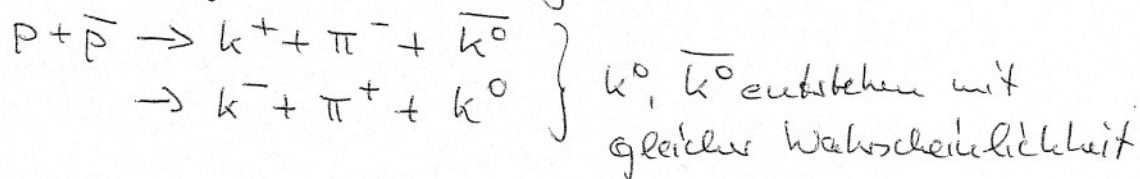
Wechselwirkung eine Invarianztransformation.

[G. Lüders, Ann. Phys. 2, 1 (1957);
W. Pauli, in "Niels Bohr and the development of physics",
McGraw-Hill & Pergamon Press, London (1955).]

Nachweis der T-Invarianzverletzungim $K^0 - \bar{K}^0$ System

CLEAR-Kollaboration, Phys. Lett. B444, 43 (1998)

"LEAR": Low Energy Antiproton Ring:



Die Strangeness des erzeugten neutralen Kaons ($\bar{K}^0: S=+1$; $K^0: S=-1$) wird anhand der Ladung des erzeugten Kaons ermittelt.

\bar{K}^0 und K^0 wandeln sich durch Oszillationen ineinander um (bereits 1961 entdeckt) und bilden eine Mischung aus Kaon- und Antikaon-Zuständen ($\Delta S=2$).

Die Verwandlung von \bar{K}^0 in K^0 und umgekehrt sind zeitgespiegelte Prozesse; wenn Zeitumkehrinvarianz gilt, werden gleiche viele Antikaonen in Kaonen umgewandelt wie umgekehrt.

Exp. Ergebnis von CLEAR: Die Umwandlung eines Antikaons in ein Kaon ist um 0.66% wahrscheinlicher als umgekehrt ^{*)} \Rightarrow T-Invarianz ist verletzt ($1.3 \cdot 10^6$ Ereignisse ausgewertet).

[Achtung: Ein Teil des beobachteten Effekts ist evtl. nicht auf T-Invarianzverletzung zurückzuführen, sondern auf die ebenfalls stattfindenden irreversiblen CP-verletzenden Zerfallsprozesse. Der genaue Anteil ist bisher offen].

^{*)} Die Strangeness des Endzustandes wird aus semileptonischen Zerfällen bestimmt, $K^0 \rightarrow e^+ \pi^- \nu$, $\bar{K}^0 \rightarrow e^- \pi^+ \bar{\nu}$ ($\Delta S = \Delta Q$)

6. Lösung der Dirac-Gleichung mit Zentralpotential

Betrachte ein Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen mit Masse m , Ladung e (z.B. Elektron $m = m_e$, $e = -e_0$) in einem statischen Zentralfeld mit $\vec{A} = 0$,

$V(r) = e\phi(r)$ potentielle Energie. (Beispiel: H-Atom, $V(r) = -\frac{e^2}{r}$)

In der DE für den statischen Fall,

$H_D \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$; ψ 4-komp. Spinor ist dann der Dirac-Operator

$$H_D = c \vec{\alpha} \vec{p} + \beta m c^2 + V(r).$$

Lösung der DE durch Trennung der Variablen.

Dazu: Suche Operatoren, die mit H_D vertauschen, so dass sie "guten" Quantenzahlen entsprechen.

In der nichtrelativistischen Theorie kommt es als Hamilton-Operator

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)$$

eines spinlosen Teilchens der Masse m im Zentralfeld $V(r)$ mit jeder kartesischen Komponente des

Drehimpulsoperators,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \text{ und mit } L^2.$$

⇒ ∃ simultane Eigenzustände der Operatoren

$$H, L^2, L_z \text{ mit Eigenwerten}$$

$$E, l(l+1)\hbar^2, m_l\hbar$$

In der Dirac-Theorie kommutieren jedoch weder \vec{L} noch L^2 mit H_D ; vielmehr ist

$$[H_D, \vec{L}] = -i\hbar c (\vec{\alpha} \times \vec{p})$$

und analog für den Spin-Operator mit

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} ; S^2 \chi = s(s+1)\hbar^2 \chi, s = \frac{1}{2}$$

S_x, S_y, S_z haben je zwei mögliche Eigenwerte $\pm \frac{\hbar}{2}$

Die kartesischen Komponenten von \vec{S} vertauschen jeweils mit den kartesischen Komponenten von \vec{L} , und

$$[H_D, \vec{S}] = i\hbar c (\vec{\alpha} \times \vec{p})$$

Der Gesamtdrehimpuls-Operator ist

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, \text{ mit den üblichen Drehimpuls-Vertauschungsregeln, und}$$

$$[J^2, \vec{J}] = 0: J^2 \text{ kommutiert mit jeder kartes. Komponente von } \vec{J}.$$

⇒ ∃ simultane Eigenfunktionen von J^2 , und einer Komponente von \vec{J} , die wir als J_z wählen,

\vec{J} kommutiert auch mit der
Dirac-Hamiltonian,

$$[H_D, \vec{J}] = [H_D, \vec{L}] + [H_D, \vec{S}] = 0$$

(d.h. jede kartesische Komponente von \vec{J}
kommutiert mit der Dirac-Hamiltonian), sowie

$$[H_D, J^2] = 0$$

\Rightarrow simultane Eigenzustände von H_D, J^2 und J_z
mit Eigenwerten

$$E, j(j+1)\hbar^2 \text{ und } m_j\hbar.$$

Auch der Operator

$$\boxed{\kappa = \frac{\beta}{\hbar^2} \left(J^2 - L^2 + \frac{\hbar^2}{4} \right)}$$
 kommutiert mit H_D ,

(siehe B.H. Bransden & C.J. Joachain,

Quantum Mechanics, Prentice Hall 2000, pp. 704)

sowie auch der Paritätsoperator P ,

$$P \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \text{ mit 2-komponentigen Spinoren } \psi_A, \psi_B.$$

$\Rightarrow \psi$ ist simultane Eigenfunktion von
 H_D, P, J^2, J_z und κ .

Simultane Eigenfunktionen der Operatoren

L^2, S^2, J^2 und J_z sind die 'Spin-Winkelfunktionen'

y_{e, m_j}^{j, m_j} , mit der Parität $(-1)^l$.

Es ist $\psi_A \propto y_{e, \frac{1}{2}}^{j, m_j}$

$\psi_B \propto y_{e', \frac{1}{2}}^{j', m_j}$, $e' = e \pm 1$

$\Rightarrow e = j - \frac{1}{2} \approx e' = j + \frac{1}{2}$
 $e = j + \frac{1}{2} \approx e' = j - \frac{1}{2}$

und wir können für ψ den Lösungsansatz machen

$$\psi_{E, l, m_j} = r^{-1} \begin{pmatrix} P_{El}(r) y_{e, m_j}^{j, m_j} \\ i Q_{El}(r) y_{e', m_j}^{j', m_j} \end{pmatrix}$$

mit den Radialfunktionen $P_{El}(r), Q_{El}(r)$.

(Der Faktor i sorgt für reelle Radialgleichungen für P_{El}, Q_{El} .)

Nach einigen Rechenschritten erhält man gekoppelte DGLn 1. Ordnung für die Radialgleichungen,

$$\left[\frac{d}{dr} - \frac{k}{r} \right] P_{El}(r) = \frac{E + mc^2 - V(r)}{\hbar c} Q_{El}(r)$$

$$\left[\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right] Q_{El}(r) = - \frac{E - mc^2 - V(r)}{\hbar c} P_{El}(r)$$

analog zur radialen Schrödinger-Gleichung in der nichtrelativistischen Theorie.

Durch Eliminieren von $Q_{Elk}(r)$ folgt eine DGL 2. Ordnung für $P_{Elk}(r)$,

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{A'}{A} \frac{d}{dr} + \left(AB + \frac{A'}{A} \frac{k}{r} - \frac{k(k-1)}{r^2} \right) \right] P_{Elk}(r) = 0$$

mit $A(r) = \frac{E + mc^2 - V(r)}{\hbar c}$, $A' = \frac{dA}{dr}$

$$B(r) = \frac{E - mc^2 - V(r)}{\hbar c}$$

Für das Coulombproblem in wasserstoff-ähnlichen Atomen mit Potential

$$V(r) = - \frac{Ze^2}{r} = - \frac{Z\alpha}{r}$$

lassen sich die gekoppelten Gleichungen schreiben als

$$\left[\frac{d}{dr} - \frac{k}{r} \right] P_{Elk}(r) = \left[\frac{mc}{\hbar} \left(1 + \frac{E}{mc^2} \right) + \frac{Z\alpha}{r} \right] Q_{Elk}(r)$$

$$\left[\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \right] Q_{Elk}(r) = \left[\frac{mc}{\hbar} \left(1 - \frac{E}{mc^2} \right) - \frac{Z\alpha}{r} \right] P_{Elk}(r)$$

Übergang zu neuen Variablen

$$\rho = r \cdot r$$

$$r = \frac{mc}{\hbar} \left(1 - \frac{E^2}{m^2 c^4} \right)^{1/2}$$

⇒ gekoppelte Gleichungen

$$\left[\frac{d}{d\rho} - \frac{\kappa}{\rho} \right] P_{E\kappa}(\rho) = \left[\frac{mc}{v\kappa} \left(1 + \frac{E}{mc^2} \right) + \frac{Z\alpha}{\rho} \right] Q_{E\kappa}(\rho)$$

$$\left[\frac{d}{d\rho} + \frac{\kappa}{\rho} \right] Q_{E\kappa}(\rho) = \left[\frac{mc}{v\kappa} \left(1 - \frac{E}{mc^2} \right) - \frac{Z\alpha}{\rho} \right] P_{E\kappa}(\rho)$$

Asymptotisches Verhalten für $\rho \rightarrow \infty$:

$$\frac{d}{d\rho} P_{E\kappa}(\rho) = \left[\frac{mc}{v\kappa} \left(1 + \frac{E}{mc^2} \right) \right] Q_{E\kappa}(\rho)$$

$$\frac{d}{d\rho} Q_{E\kappa}(\rho) = \left[\frac{mc}{v\kappa} \left(1 - \frac{E}{mc^2} \right) \right] P_{E\kappa}(\rho).$$

Da wir nach gebundenen Zuständen suchen, müssen

$P_{E\kappa}(\rho)$ und $Q_{E\kappa}(\rho)$ für $\rho \rightarrow \infty$ verschwinden;

die asymptotischen Gleichungen sind dann erfüllt für

$$P_{E\kappa}(\rho) = a_1 e^{-\rho}$$

$$Q_{E\kappa}(\rho) = a_2 e^{-\rho}$$

$$\text{mit } \frac{a_1}{a_2} = - \left(\frac{1 + E/mc^2}{1 - E/mc^2} \right)^{1/2}.$$

Wir suchen deshalb nach Lösungen der gekoppelten Gleichungen in der Form

$$P_{E\kappa}(\rho) = N \left(1 + \frac{E}{mc^2} \right)^{1/2} e^{-\rho} f(\rho)$$

$$Q_{E\kappa}(\rho) = -N \left(1 - \frac{E}{mc^2} \right)^{1/2} e^{-\rho} g(\rho),$$

mit einer Normierungskonstante N ;

für $\rho \rightarrow \infty$ muss gelten $f(\rho), g(\rho) \rightarrow 1$.

Die Radialfunktionen werden als Potenzentwicklungen angesetzt,

$$f(\rho) = \rho^s \sum_{k=0}^{\infty} c_k \rho^k \quad c_0 \neq 0$$

$$g(\rho) = \rho^s \sum_{k=0}^{\infty} d_k \rho^k, \quad d_0 \neq 0.$$

Einsetzen in die Radialgleichungen, und Koeffizientenvergleich ergibt eine Folge von Gleichungen; aus der ersten folgt die Relation

$$s = \frac{+}{(-)} (1e^2 - 2^2 d^2)^{1/2}$$

Damit die Radialfunktionen am Ursprung $\rho = 0$ regulär bleiben, muss das positive Vorzeichen gewählt werden.

Die folgenden Gleichungen ergeben Rekursionsrelationen für die Koeffizienten $c_1, d_1, \dots, c_n, d_n, \dots$.

Um die asymptotische Randbedingung zu erfüllen

dass $P_{Elr}(\rho)$ und $Q_{Elr}(\rho)$ im Unendlichen verschwinden,

müssen die Potenzentwicklungen abbrechen

(Argumentation wie in der nichtrelativistischen

Theorie, und in der Gleich-Pardon-Theorie).

Dies ist nur für bestimmte Energiewerte möglich,
die DIRAC-Energieeigenwerte

(RQM7)

$$E_{nj}^D = mc^2 \left[1 + \left(\frac{Z\alpha}{n - j - 1/2 + [(j + 1/2)^2 - Z^2\alpha^2]^{1/2}} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

Durch Entwicklung nach $(Z\alpha)^2$ folgt

$$E_{nj}^D = mc^2 \left[1 - \frac{(Z\alpha)^2}{2n^2} - \frac{(Z\alpha)^4}{2n^4} \left(\frac{n}{j + 1/2} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right]$$

und nach Subtraktion der Ruheenergie mc^2 erhält man
die Energieeigenwerte

$$E_{nj} = E_{nj}^D - mc^2 =$$

$$E_{nj} = E_n^{(0)} \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \left(\frac{n}{j + 1/2} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right]$$

mit dem nichtrelativistischen Schrödinger-Energieeigenwert $E_n^{(0)}$,

$$E_n^{(0)} = \frac{mc^2 (Z\alpha)^2}{2n^2}, \quad \text{da nur von der Hauptquantenzahl } n$$

abhängt. In der Dirac-Theorie spalten diese Niveaus
in eine Feinstruktur von n unterschiedlichen Niveaus

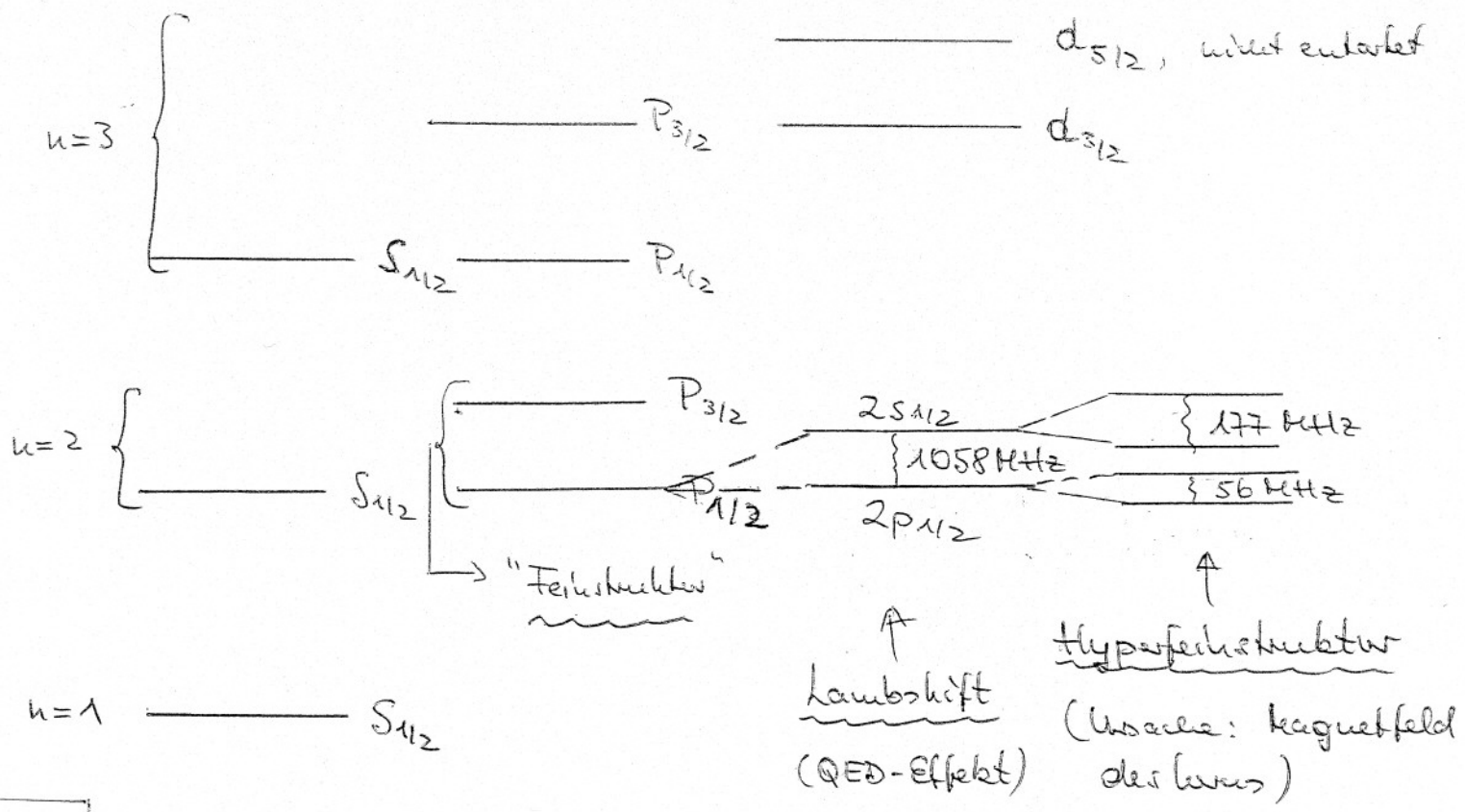
E_{nj} auf, mit $j = 1/2, 3/2, \dots, n - 1/2$ - als Folge der
relativistischen Effekte.

In der Dirac-Theorie sind zwei Niveaus mit gleichem
 (n, j) auch dann entartet, wenn sie unterschiedlichen
Bahndrehimpuls haben ($l = j \pm 1/2$: z.B. $2s_{1/2}, 2p_{1/2}$).

Die einzigen nichtentarteten Niveaus sind

$1s_{1/2}, 2p_{3/2}, 3d_{5/2}, \dots$

Termenschema von Wasserstoff (nicht maßstabgerecht)



"Fine structure of the Hydrogen Atom by a Microwave Method", Phys. Rev. 72, 241 (1947)

Beim gebundenen Elektron ergeben sich relativistische Korrekturen zu $g_e^{Dirac} = 2$ für das freie Elektron, die G. Breit erstmals 1928 berechnet hat, sowie QED Korrekturen (aufgrund der Bindung). Die Dirac-Theorie wurde in zahlreichen spektroskopischen Untersuchungen an Wasserstoff und wasserstoff-ähnlichen Ionen (u.a. He^+) getestet. Man fand 1937/38 experimentelle Anzeichen, dass die $2S_{1/2}$ und $2P_{1/2}$ Niveaus nicht exakt übereinstimmen, aber durch die Dopplerverbreiterung der Niveaus blieb die Lage unklar. Erst 1947 konnten W.E. Lamb und R.C. Retherford mit Mikrowellen-Techniken einen Radiofrequenz-Übergang zwischen $2S_{1/2}$ und $2P_{1/2}$ induzieren, und die "Lamb-Verchiebung" von 1058 MHz bestimmen: Ausgangspunkt der Entwicklung der Quantenelektrodynamik (QED), eine der erfolgreichsten physikalischen Theorien.

Bestimmung der Lambshift (nichtrelat. Approximation)

Die kleine Differenz der $2s_{1/2}$ und $2p_{1/2}$ Energieniveaus von ≈ 1058 MHz im H-Atom heißt nach Willis Lamb (1913-2008) Lambshift. Nach Dirac sollten beide Niveaus die gleiche Energie haben, während die Wechselwirkung zwischen Elektron und Vakuum eine Verschiebung bewirkt. Die Messung (1947) der Verschiebung durch Lamb und Retherford war der Auslöser für die Entdeckung der Renormierung im QED-Rahmen durch Schwinger, Feynman und Dyson.

Herr Bethe (s. Video!) gab 1947 eine ^(die erste) hermitesche Ableitung der Lambshift; die folgende Darstellung beruht auf H.O. Scully & H.S. Zubairy, "Quantum

Optics", CUP 1997 [cf. H.A. Bethe, Phys. Rev. 72, 339 (1947)].

Die mit dem Vakuum assoziierten Fluktuationen des elektrischen und magnetischen Feldes "stören" das Coulombpotential des Kerns, indem sie das Elektron bewegt. Dadurch fluktuiert auch die räumliche Position des Elektrons, und erlaubt so indirekt die Energieschiebung.

Die dadurch hervorgerufene Differenz der potentiellen Energie ist

$$\Delta V = V(\vec{r} + \delta\vec{r}) - V(\vec{r}) = \delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V + \frac{1}{2} (\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla})^2 V(\vec{r}) + \dots$$

Die Fluktuationen sind isotrop,

$$\langle \delta\vec{r} \rangle_{\text{vac}} = 0$$

$$\langle (\delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla})^2 \rangle_{\text{vac}} = \frac{1}{3} \langle (\delta r)^2 \rangle_{\text{vac}} \nabla^2$$

und wir erhalten für die mittlere Differenz der potentiellen Energie

$$\langle \Delta V \rangle = \frac{1}{6} \langle (\delta r)^2 \rangle_{\text{vac}} \langle \nabla^2 \left(\frac{-e^2}{r} \right) \rangle$$

Die klassische Bewegungsgleichung für die Elektronen-Fluktuationen $(\delta\vec{r})_{\vec{k}}$, die durch das Feld mit Wellenvektor \vec{k} und Frequenz ω ausgelöst werden, ist

$$\boxed{m \frac{d^2}{dt^2} (\delta\vec{r})_{\vec{k}} = -e E_{\vec{k}}}$$

dabei muss die Frequenz ω größer als ω_0 im Bohr-Orbit sein,

$$\omega > \frac{\pi c}{a_0}, \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{m e^2}$$

$$(\omega = ck) : k > \frac{\pi}{a_0}$$

Für ein mit ω oszillierendes Feld

$$\delta_+(t) \simeq \delta_+(0) e^{-i\omega t} + \text{cc.}$$

$k = (\text{wellen-})$ Wellenzahl:

[In der Spektroskopie ist $k = \frac{1}{\lambda}$, Kehrwert d. Wellenlänge!]

$$\Rightarrow (\delta r)_{\vec{k}} \simeq \frac{e}{m c^2 k^2} E_{\vec{k}} = \frac{e}{m c^2 k^2} E_{\vec{k}} \left[a_{\vec{k}} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + \text{h.c.} \right]$$

Summation über \vec{k} ergibt

$$\begin{aligned} \langle (\delta \vec{r})^2 \rangle_{vac} &= \sum_{\vec{k}} \left(\frac{e}{mc^2 k^2} \right)^2 \langle 0 | (E_{\vec{k}})^2 | 0 \rangle = \\ &= \sum_{\vec{k}} \left(\frac{e}{mc^2 k^2} \right)^2 \cdot E_{\vec{k}}^2 \end{aligned}$$

mit $E_{\vec{k}} = \left(\frac{\hbar c k \cdot 2\pi}{V} \right)^{1/2}$

Da \vec{k} kontinuierlich ist, wird aus der Summe ein Integral,

$$\begin{aligned} \langle (\delta \vec{r})^2 \rangle_{vac} &= 2 \cdot \frac{V}{(2\pi)^3} \cdot 4\pi \int dk \cdot k^2 \left(\frac{e}{mc^2 k^2} \right)^2 \frac{\hbar c k \cdot 2\pi}{V} = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \int \frac{dk}{k} \end{aligned}$$

Ohne Grenzen divergiert das Integral. Es muss jedoch gelten (s.o.) $k > \frac{\pi}{a_0}$. Ferner muss die Wellenlänge größer als die Compton-Wellenlänge des Elektrons sein,

$$\begin{aligned} \lambda > \lambda_e = \frac{\hbar}{mc}, \text{ oder } k < \frac{mc}{\hbar} \\ \left(\lambda_e = \frac{\lambda_e}{2\pi} = \frac{\hbar}{2\pi mc} \right) \end{aligned}$$

Dies definiert obere und untere Grenzen des Integrals,

$$\int_{\pi/a_0}^{mc/\hbar} \frac{dk}{k} = \ln \left(\frac{mc \cdot a_0}{\hbar \cdot \pi} \right) = \ln \left(\frac{mc \hbar^2}{\hbar \pi m e^2} \right) = \ln \left(\frac{\hbar c}{\pi e^2} \right)$$

so dass

$$\langle (\sigma_{\vec{r}})^2 \rangle_{\text{vac}} \approx \frac{2}{\pi} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \ln \left(\frac{\hbar c}{\pi e^2} \right)$$

Für Coulombpotential (s.o.),

$$\begin{aligned} \langle \vec{\nabla}^2 \left(-\frac{e^2}{r} \right) \rangle_{\text{at}} &= -e^2 \int d^3r \psi^*(\vec{r}) \vec{\nabla}^2 \left(\frac{1}{r} \right) \psi(\vec{r}) = \\ &= 4\pi \cdot e^2 |\psi(0)|^2 \end{aligned}$$

$$\left[\text{mit } \vec{\nabla}^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\vec{r}) \right]$$

Für p-Orbitale verschwindet die nichtrelativistische Wellenfunktion am Ursprung, so dass es kein (im Rahmen dieses Abschnittes) keine Energieverschiebung gibt. Für s-Orbitale ist der Wert der Wellenfunktion am Ursprung

$$\psi_{2s}(0) = \frac{1}{(8\pi a_0^3)^{1/2}} =$$

mit dem Bohrschen Radius $a_0 = \frac{\hbar}{me^2} \approx 0.5 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0.5 \cdot 10^5 \text{ fm}$

$$\Rightarrow \langle \nabla^2 \left(-\frac{e^2}{r} \right) \rangle_{\text{at}} = \frac{4\pi e^2}{8\pi a_0^3} = \frac{e^2}{2a_0^3}$$

und der Unterschied in der potentiellen Energie wird

$$\begin{aligned} \langle \Delta V \rangle &= \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \cdot \ln \left(\frac{\hbar c}{\pi e^2} \right) \cdot \frac{e^2}{2 \cdot a_0^3} \\ &\approx \underbrace{0.11}_{137} \cdot \frac{1}{137} \cdot \underbrace{(386 \text{ fm})^2}_{3.78} \cdot \ln \left(\frac{137}{\pi} \right) \cdot \frac{1}{2 \cdot 137 \cdot (0.5 \cdot 10^5 \text{ fm})^3} \\ &= 149,6 \cdot 3.78 \cdot \frac{197.32}{34.25 \cdot 10^{15}} \text{ MeV} = 2603,9 \cdot 10^{-9} \text{ eV} \approx 260 \cdot 10^{-8} \\ &\uparrow \text{ Für } \ln(137) \Rightarrow \langle \Delta V \rangle = 818.7 \text{ MHz} \quad \hat{=} \underline{\underline{629 \text{ MHz}}} \end{aligned}$$

Dieser Wert ist etwa in der Präzisionsordnung
des experimentellen Wertes von 1058 MHz
(Bitte die Vorfaktoren nochmals prüfen).

Im Rahmen des QED ist die Lambshift ein
1-loop Effekt, der durch Emission und Re-Absorption
virtueller Photonen im Kernfeld zustande kommt.

Das Feld ist in der QED quantisiert, und (ähnlich wie
beim harmonischen Oszillator in der QM) ist der niedrigste
Energiezustand nicht bei $E=0$: Nullpunktozillationen,
da Elektron macht rasche oszillatorische Bewegungen
im Feld; es wird über einen Bereich $\pm \Delta r$ "verschmiert".

In der QED wird der Ausdruck für die Lambshift
bei s-Zuständen ($l=0$)

$$\Delta E_{Lamb}^{l=0} = \alpha^5 m_e c^2 \frac{k(n,0)}{4n^3}, \quad l=0; \quad k(n,0) \approx 13$$

und bei anderen Zuständen mit $l \neq 0$:

$$\Delta E_{Lamb}^{l \neq 0} = \alpha^5 m_e c^2 \frac{1}{4n^3} \left[k(n,l) \pm \frac{1}{\pi(j+\frac{1}{2})(l+\frac{1}{2})} \right], \quad l \neq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Es ist } \Delta E_{Lamb}^{QED} &= 1057.864 \pm 0.014 \text{ MHz}, & \bar{j} &= l \pm \frac{1}{2} \\ \Delta E_{Lamb}^{exp} &= 1057.862 \pm 0.020 \text{ MHz}. & & \text{mit } k(n,l) < 0.05. \end{aligned}$$

mit Hilfe der Lambshift kann die
Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ auf $< 1 \text{ ppm}$ gemessen
werden: Präzisionswert der QED.

7. Das kleine Paradoxon

BRMS

Wir untersuchen die Reflexion von Elektronen an einem (unendlich ausgedehnten) Potentialsprung in der DIRAC-Theorie. Das Problem wird zunächst im Rahmen der Einteilchen-Interpretation der DE untersucht. (Bei hinreichend hoher e^- Geschwindigkeit muss relativistisch gerechnet werden)
Originalarbeit: O. Klein, Z. Physik 53, 157 (1929).

Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac.

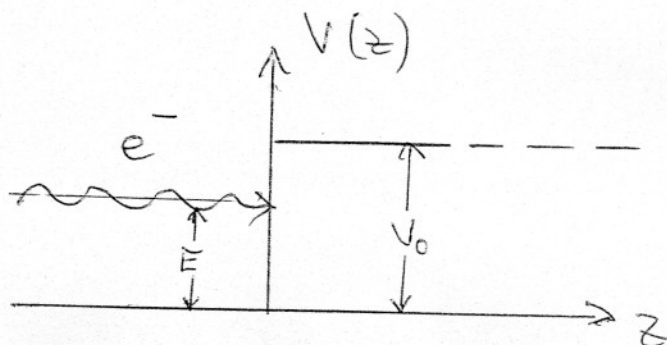
Von O. Klein in Kopenhagen.

(Eingegangen am 24. Dezember 1928.)

Es wird die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der neuen Diracschen Dynamik untersucht. Bei sehr großen Werten des Potentialsprungs dringen der Theorie zufolge Elektronen gegen die auf sie wirkende elektrische Kraft durch die Sprungfläche und kommen auf der anderen Seite mit einer negativen kinetischen Energie an. Dies dürfte als ein besonders schroffes Beispiel der von Dirac hervorgehobenen Schwierigkeit der relativistischen Dynamik zu betrachten sein.

Einleitung. Wie Dirac* hervorgehoben hat, besteht eine ernste Schwierigkeit für die relativistische Quantentheorie in dem Umstand, daß ein Elektron in einem Kraftfeld nach der Theorie negative Energiewerte annehmen kann, die mit den physikalisch sinnvollen positiven Energiewerten im allgemeinen durch Übergangsmöglichkeiten verbunden sind. Auch in seiner neuen, in anderer Hinsicht so erfolgreichen Behandlung der relativistischen Quantendynamik ist es ihm nicht gelungen, diese Schwierigkeit zu überwinden. In den folgenden Zeilen soll auf ein elementares Beispiel hingewiesen werden, wo diese Schwierigkeit besonders schroff zum Vorschein kommt. Es handelt sich hierbei um die Reflexion und Brechung von Elektronenwellen an einer Grenzfläche, wo das elektrostatische Potential einen Sprung hat.

Eine Elektronen-
Materiewelle propagiert
mit Energie E



längs der z -Achse und trifft auf
eine Potentialstufe der Höhe $V_0 > E$. Die e^- Geschwindigkeit
ist vergleichbar mit c , $0,3c \leq v_e \leq c$.

Für das freie Elektron gilt

$$(E/c)^2 = \vec{p}^2 + m^2 c^2$$

In Gegenwart des Potentials ist

$$\left(\frac{E-V_0}{c}\right)^2 = \vec{p}^2 + m^2 c^2, \text{ mit dem Elektronenimpuls } \vec{p} \text{ im Potential}$$

Die DE ist dann (stationärer Fall) $0 = \vec{\alpha} \vec{p} + \beta m c + \frac{e\phi}{c}$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{E-e\phi}{c} - \beta m c \right\} \psi + i \hbar \sum_{k=1}^3 \alpha_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = 0$$

und die adjungierte Gleichung

$$\bar{\psi} \left\{ \frac{E-e\phi}{c} - \beta m c \right\} + i \hbar \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_k} \alpha_k = 0$$

mit $e\phi = 0, z < 0$

$e\phi = V_0, z > 0$

und eine einlaufende Elektronenwelle $p \uparrow e_z$

$$\psi_i = u_i \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (p z - E t) \right\} \text{ wird für } \alpha \rightarrow \alpha_3 \text{ die DE}$$

$$\left\{ \frac{E}{c} - \alpha p - \beta m c \right\} u_i = 0 \text{ mit } E > 0 \text{ für einlaufende Wellen.}$$

$$\text{mit } \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{i}{\hbar} p \psi.$$

Die Amplitude der einlaufenden Welle ist

$u_i \neq 0$, und mit $\alpha_i \beta + \beta \alpha_k = 0$ muss gelten

$$\frac{E}{c} = \alpha p + \beta m c$$

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2 + \underbrace{(\alpha\beta + \beta\alpha)}_{=0} p m c$$

Der Impuls der reflektierten Welle ist $-p$,
der Impuls der transmittierten Welle ist $\hat{p} = \hat{p}$ (in z-Richtung,
mit $(\frac{E-V_0}{c})^2 = \hat{p}^2 + m^2 c^2$.

Für kleines V_0 ist \hat{p} positiv, und

$$\psi_r = u_r \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(-pz - Et)\right\}$$

$$\psi_t = u_t \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(\hat{p}z - Et)\right\}$$

und aus der ∂E folgt mit $p \rightarrow -p$

$$\left\{\frac{E}{c} + \alpha p - \beta m c\right\} u_r = 0, \text{ und mit } p \rightarrow \hat{p}$$

$$\left\{\frac{E-V_0}{c} - \alpha \hat{p} - \beta m c\right\} u_t = 0.$$

Die Gesamtwellenfunktion muss kontinuierlich
an der Grenzfläche sein, d.h. für $z=0$

$$u_i + u_r = u_t$$

Daraus folgt mit der Gleichung für die einlaufende
Welle u_i : $(\frac{E}{c} - \alpha p - \beta m c) u_i = 0 \Rightarrow$

$$\left(\frac{E}{c} - \beta m c\right) u_i = \alpha p u_i$$

$$\left(\frac{E}{c} - \beta mc\right) u_i = \alpha p u_i$$

und mit den Gleichungen für reflektierte und transmittierte Welle

$$\left(\frac{E}{c} - \beta mc\right) u_r = -\alpha p \cdot u_r$$

$$\left(\frac{E - v_0}{c} - \beta mc\right) (u_i + u_r) = \alpha \hat{p} (u_i + u_r)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E}{c} - \beta mc\right) (u_i + u_r) = \left(\frac{v_0}{c} + \alpha \hat{p}\right) (u_i + u_r)$$

sowie aus den ersten beiden Gleichungen durch Addition

$$\left(\frac{E}{c} - \beta mc\right) (u_i + u_r) = \alpha p (u_i - u_r)$$

so dass nach Gleichsetzen der rechten Seiten folgt

$$\left(\frac{v_0}{c} + \alpha \hat{p}\right) (u_i + u_r) = \alpha p (u_i - u_r)$$

oder

$$\boxed{\left[\frac{v_0}{c} + \alpha (p + \hat{p})\right] u_r = -\left[\frac{v_0}{c} - \alpha (p - \hat{p})\right] u_i}$$

Multipliziere beide Seiten mit $\frac{v_0}{c} - \alpha (p + \hat{p})$, beachte $\alpha^2 = 1$, u. die Energie - Impuls - Beziehung $\left(\frac{E - v_0}{c}\right)^2 = \hat{p}^2 + m^2 c^2$; $\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2$

$$u_r = \frac{(2v_0/c)(-E/c + \alpha p)}{v_0^2/c^2 - (p + \hat{p})^2} u_i \equiv r u_i$$

und analog für die adjungierte Amplitude der reflektierten Welle,

$$u_r^+ = v u_i^+$$

⇒ Wahrscheinlichkeitsdichte für die reflektierte Welle:

$$u_r^+ u_r^+ = \left[\frac{2v_0/c}{v_0^2/c^2 - (p+\hat{p})^2} \right]^2 u_i^+ \left[-\frac{E}{c} + \alpha p \right]^2 u_i.$$

Aus den Bewegungsgleichungen für u_i^- und u_i^+ folgt die Identität (Aufgabe)

$$c u_i^+ \alpha u_i^- = \frac{pc^2}{E} u_i^+ u_i^-$$

so dass wir die Amplitude der reflektierten Welle als Anteil R der Amplitude der einlaufenden Welle schreiben können: $(p^2 = \frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2)$

$$\begin{aligned} \underline{u_r^+ u_r^+} &= \left[\frac{2v_0/c}{v_0^2/c^2 - (p+\hat{p})^2} \right]^2 \left[\left(\frac{E^2}{c^2} + p^2 \right) u_i^+ u_i^- - \frac{2E p}{c} u_i^+ \alpha u_i^- \right] \\ &= \left[\frac{2v_0/c}{v_0^2/c^2 - (p+\hat{p})^2} \right]^2 u_i^+ u_i^- \equiv \underline{R u_i^+ u_i^-} \end{aligned}$$

so dass R der Anteil der reflektierten Elektronen ist.

Für $v_0 = 0 \Rightarrow R = 0$; alle Elektronen laufen durch
für $v_0 = E - mc^2$ (d.h. $\hat{p} = 0$) $\Rightarrow R = 1$: Alle Elektronen werden reflektiert.

Für noch größere $V_0 > E - mc^2$ wird \hat{p} imaginär.

Wir setzen dann

$$\psi_t = u_t \exp\left[-\mu z - i \frac{E}{\hbar} t\right] \quad \text{mit } \mu \in \mathbb{R}.$$

Es ist $\mu > 0$, da sonst die Dichte rechts der Barriere für $z \rightarrow \infty$ unendlich groß würde.

Andererseits ist mit (s.o.)

$$\psi_t = u_t \exp\left\{\frac{i}{\hbar} (\hat{p} z - Et)\right\} \Rightarrow \boxed{\hat{p} = i\hbar\mu}$$

$$\Rightarrow u_r = -\frac{(2V_0/c)(E/c - \hat{p})}{V_0^2/c^2 - (\hat{p} + i\hbar\mu)^2} u_i$$

$$u_r^+ = -\frac{(2V_0/c)(E/c - \hat{p})}{V_0^2/c^2 - (\hat{p} - i\hbar\mu)^2} u_i^+$$

$$\Rightarrow u_r^+ u_r = \frac{(2V_0/c)^2 (E/c^2 - p^2)}{[(V_0/c + p)^2 + \mu^2 \hbar^2][(V_0/c - p)^2 + \mu^2 \hbar^2]} u_i^+ u_i \equiv R u_i^+ u_i$$

Mit den Energie-Impuls-Beziehungen

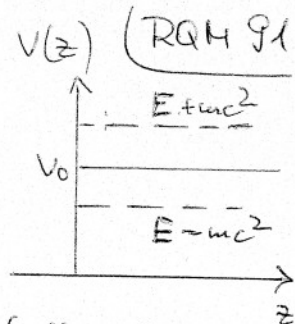
$$\left[\frac{(E - V_0)}{c}\right]^2 = p^2 + m^2 c^2, \quad \frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2 \quad \text{folgt}$$

$$\hat{p}^2 = p^2 - \frac{V_0(2E - V_0)}{c^2}, \quad \text{und da } \hat{p}^2 = -\mu^2 \hbar^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{V_0}{c} \mp p\right)^2 + \mu^2 \hbar^2 = 2 \frac{V_0}{c} \left(\frac{E}{c} \mp p\right) \Rightarrow \boxed{R = 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_r^+ u_r = u_i^+ u_i}$$

\Rightarrow Für $E + mc^2 > V_0 > E - mc^2$ ist die an der
 Potentialschwelle reflektierte Strom ebenfalls
 gleich dem einfallenden.



Hinter der Schwelle gibt es eine exponentiell abfallende
 Lösung.

Bei zunehmendem V_0 wird \hat{p} - und damit μ wegen
 $\hat{p} = i\hbar\mu$ - erst größer, erreicht bei $E = V_0$ einen

Maximalwert [wegen $\hat{p}^2 = p^2 - \frac{V_0(2E - V_0)}{c^2}$], und

fällt dann wieder ab; für $V_0 = E + mc^2$ wird $\mu = 0$.

Für $V_0 > E + mc^2$ wird \hat{p} wieder reell, jedoch ist
 die kinetische Energie $E - V_0$ hier negativ, so dass
 die Region rechts der Schwelle klassisch verboten ist.

Quantenmechanisch kann ein Anteil der Welle

in dem Potentialwall eindringen (analog zu nichtrel. QM,
 jedoch hier bei rel. Energien \Rightarrow andere phys. Verhalten)

Bei $V_0 = E + mc^2$ war der Reflexionskoeffizient $R = 1$
 (\equiv Totalreflexion); für weiter zunehmendes V_0 nimmt
 R ab bis zum Minimalwert

$$\alpha = R_{\min} = \lim_{V_0 \rightarrow \infty} R(V_0) = \frac{E/c - p}{E/c + p}$$

und da Reflexion + Transmission (β) = 1 ergeben
 muss, ist der Transmissionskoeffizient β :

$$\beta = \frac{2p}{E/c + p} \quad (\text{check } \alpha + \beta = \frac{E/c - p + 2p}{E/c + p} = 1 \checkmark)$$

Für große Elektronenimpulse p kann demnach der Bruchteil der Elektronen, der durch die Grenzfläche dringt, beträchtliche Werte annehmen:

Bei einem Impuls $p = mc$, rel. Energie $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$

($\hat{=}$ Elektronengeschwindigkeit $v_e = \frac{p}{E}$)

$$= \frac{mc}{\sqrt{2} mc^2} \stackrel{v \approx 1}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.71$$

$= \sqrt{2m^2 c^4} = \sqrt{2} mc^2$
 $\approx 1.4 \times \text{Ruheenergie}$

71% der Lichtgeschwindigkeit)

Wird der Transmissionskoeffizient

$$\beta = \frac{2p}{E/c + p} = \frac{2mc}{E/c + mc} = \frac{2}{\frac{E}{mc^2} + 1} = \frac{2}{\sqrt{2} + 1} \approx 0.83$$

dh. 83% der einlaufenden Elektronen durchdringen die Potentialbarriere!

Die großen β -Werte bleiben auch dann erhalten, wenn V_0 nur einige Ruhemassen-Werte (nicht $V_0 \gg m_0$) beträgt.

Rechnungen von F. Seeler [Z. Physik 73, 547 (1931)]

haben gezeigt, dass die starke Transmission nicht stattfindet, wenn der Austritt des Potentials allmählich ist,
 → [Erkenntnis von Niels Bohr!]

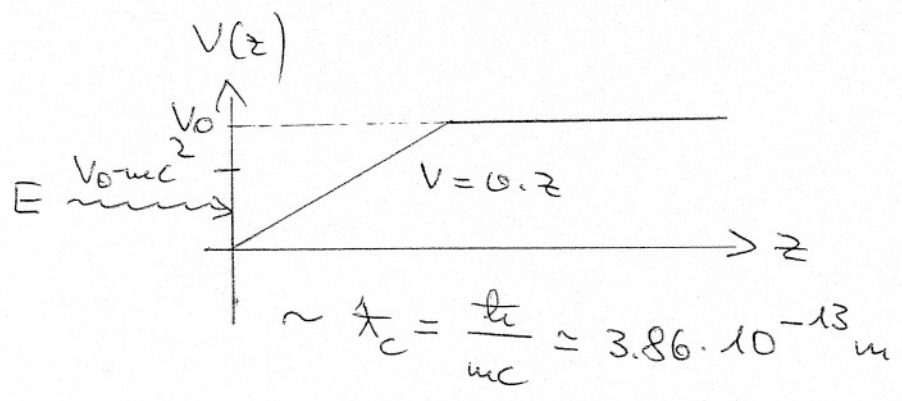
und (von $V=0$ bis $V=V_0$) über eine Distanz von der Größenordnung der Comptonwellenlänge erfolgt, $V = 0.2$

$$d \approx \frac{h}{m \cdot c}$$

Den in der Dirac-Theorie erwarteten großen Transmissionskoeffizienten nennt man das "Klein'sche Paradoxon".
 Die erforderliche scharfe Barriere ist experimentell schwer realisierbar

Lösung der DE mit dem Potential $V = \vartheta z$

F. Sauter, Z. Physik 73, 547 (1931).



⇒ DE:

$$\left\{ \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} + \gamma_0 \left(\frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t} + \vartheta z \right) + \vartheta E_0 \right\} \psi = 0$$

mit $E_0 = mc^2$, $\vartheta = \frac{2\pi}{h c}$

Ansatz $\psi = e^{\frac{2\pi i}{h} (x p_x + y p_y - Et)} \chi(z)$

$$\Rightarrow \left\{ \gamma_3 \frac{d}{dz} + \vartheta \gamma_0 (\vartheta z - E) + \vartheta (E_0 + ic \frac{\gamma_1}{4} p_x + ic \gamma_2 p_y) \right\} \chi = 0$$

⇒ Lösung und Berechnung des Transmissionskoeffizienten siehe Z. Physik (Referenz > 0.)

Für $E > \vartheta z$ haben Impuls u. Geschwindigkeit das gleiche Vorzeichen, für $E < \vartheta z$ das entgegengesetzte (die kinet. Energie wird negativ).

dann wird der Transmissionskoeffizient

$$\beta = e^{-k^2 \pi}, \text{ und } \alpha = 1, \text{ für } k^2 \gg 1$$

bis auf Glieder höherer Ordnung in $1/k^2$

hier ist

$$k = \sqrt{\frac{U}{c}} k,$$

$$k^2 = E_0^2 + c^2(p_x^2 + p_y^2)$$

⇒ Für alle elektrischen Felder, bei denen $k^2 \gg 1$ ist (das sind alle praktisch herstellbaren Felder)

ist β verschwindend klein.

Der Wert von β hängt in erster Näherung von der Feldstärke (der Steilheit des Anstiegs) ab; erst für $k^2 \gg 1$ erhält man endliche Werte, entsprechend Feldern von 10^{16} Volt/cm.

"Seventy years of the Klein paradox"

Für $k^2 \approx 1$ gilt $k^2 = \frac{2\pi}{hc} \frac{(hc)^2}{c} \approx 1$

$$\boxed{\frac{U}{mc^2} \approx 1}$$

⇒ man erhält erst endliche Werte für α , wenn der Potentialanstieg $U \cdot \frac{h}{mc}$ auf einer Strecke von der Comptonwellenlänge von der Probenordnung der Ruheenergie wird: das ist starke Felder lassen sich bis heute nicht herstellen. (Die Bohrsche Vermutung ist damit bestätigt). Der Grenzfall eines ∞ steilen Potentialanstiegs (O.klein) kommt nicht her, wenn,

$$\beta \rightarrow \frac{2cp}{E + cp}$$

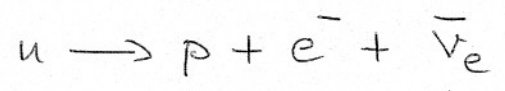
Ziem aktuellsten Stand der Forschung zum Kleinparadoxon siehe N. Dombey, A. Calogeracos Phys. Rep. 315, 41-58 (1999)

8. Dirac-Neutrinos: Die Weyl-Gleichung

8.1 Introduction to Neutrinos

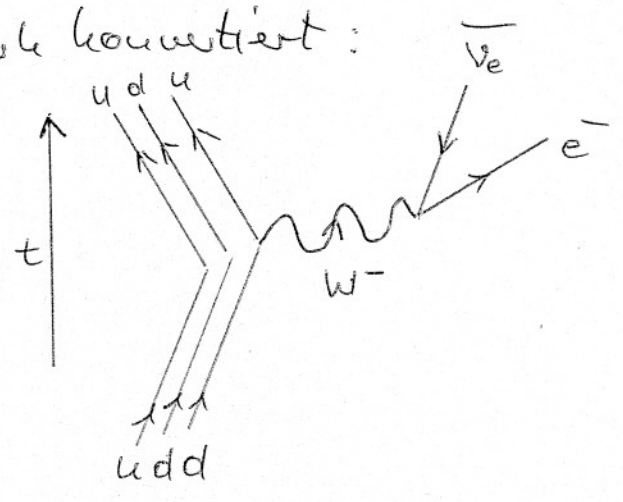
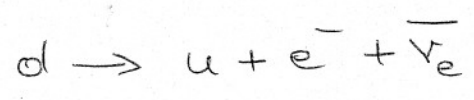
Die Existenz eines Neutrinos postuliert W. Pauli 1930, um beim β^- -Zerfall durch schwache

Wechselwirkung Energie- und Impulserhaltung zu gewährleisten. Dabei wird ein Neutron in ein Proton konvertiert; ein Elektron und ein Anti-Elektron Neutrino wird ausgesandt:

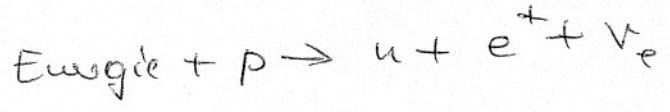


↳ neutral, unbeschiedet, fast masselos. Fermion mit Spin $1/2$, schwach wechselwirkend

Auf dem Quark-Niveau wird ein d-Quark durch W^- -Emission in ein u-Quark konvertiert:

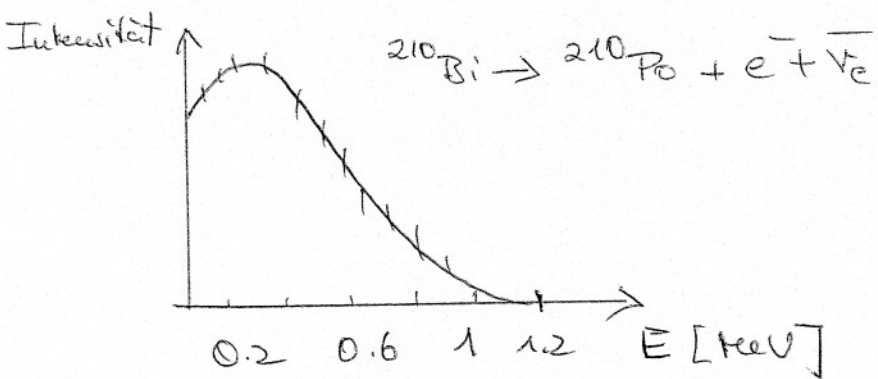


Beim β^+ -Zerfall wird unter Energiezufuhr ein Proton in ein Neutron konvertiert, und ein Positron (e^+) und ein Elektron-Neutrino emittiert:



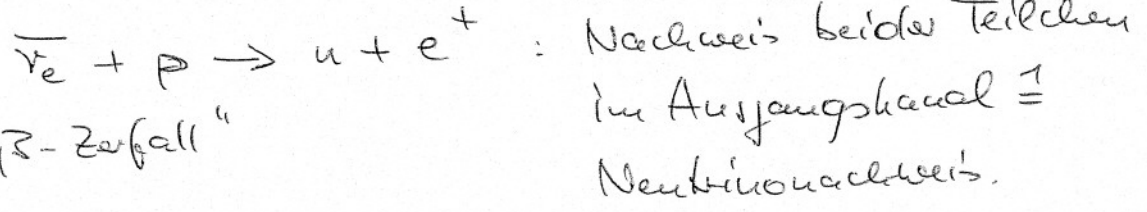
Außerdem als der β^- -Zerfall kann der β^+ -Zerfall nicht "spontan" stattfinden, weil die Neutronenmasse größer als die Protonenmasse ist \Rightarrow die Bindungsenergie des Mutterkerns muss größer als die des Tochterkerns sein.

Da die Zerfallsenergie einen festen Wert hat, das gemessene Neutrino-Energiespektrum jedoch kontinuierlich ist:



Das aus Energie- und Impulserhaltungsebenen erforderliche Antineutrino wurde 1956 von C. Cowan, F. Reines et al.

(NP Physik 1995) nachgewiesen: zunächst "Projekt Poltergeist" in Hanford, ab 1956 in Savannah River mit $\bar{\nu}_e$ aus einem Reaktor und $0.5 \text{ m}^3 \text{ H}_2\text{O}$



"inverse β -Zerfall"

1962 L. Lederman, M. Schwartz, J. Steinberger Nachweis des ν_μ Myon-Neutrinos (NP 1988)

2000 DONUT coll. / Fermilab: ν_τ Tau-Neutrino

$\Rightarrow \exists$ 3 Neutrino-Flavours.

In der Sonne werden ν_e Elektronen-Neutrinos erzeugt, u.a. im Prozess $1\text{H} + 1\text{H} \rightarrow 2\text{H} + e^+ + \nu_e$

Auf dem Weg zur Erde wandeln sie sich in die anderen Neutrino-Flavours um \Rightarrow alle Ruhemassen ungleich - wenn auch nur sehr wenig - von Null verschieden sein.

Für die Differenz der Massenquadrate von Elektron- und Myon-Neutrinos folgt

$$\Delta m_{sol}^2 \approx 8 \cdot 10^{-5} \text{ eV}/c^2,$$

aus den Oszillationen atmosphärischer Myon-Neutrinos in Tau-Neutrinos

$$\Delta m_{atm}^2 \approx 2.4 \cdot 10^{-3} \text{ eV}/c^2.$$

Absolute Werte für die $\bar{\nu}_e$ -Masse lassen sich bisher nur aus ^3H (Tritium) β -Zerfallsexperimenten herleiten (ohne Grenzen),

$$m_{\bar{\nu}_e} < 2 \text{ eV}/c^2.$$

In jedem Fall ist die Neutrinomasse im Vergleich zur Elektronenmasse $m_e \approx 5.11 \cdot 10^5 \text{ eV}/c^2$

vernachlässigbar klein, $\frac{m_{\bar{\nu}_e}}{m_e} \approx 7.8 \cdot 10^{-6}$.

Es ist daher sinnvoll, eine Theorie für Fermionen mit $m=0$ zu untersuchen, wie sie als erster 1929 H. Weyl aufgestellt hat [H. Weyl, Z. Physik 56, 330 (1929)],

um masselose Spin 1/2 Teilchen zu beschreiben.

Außer als die DE hat sie nur 2 Komponenten, und verletzt die Paritätsinvarianz. Sie wurde daher

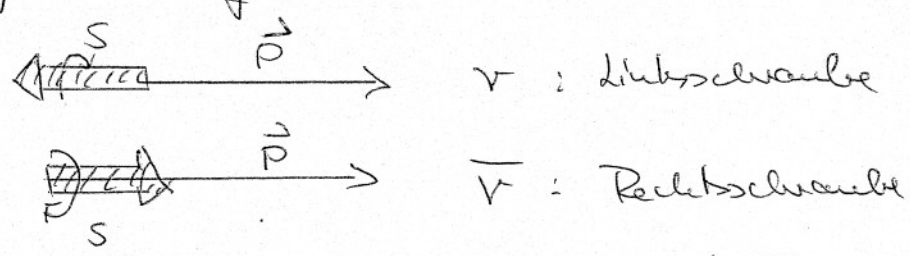
zunächst verworfen, aber nach der Entdeckung der

P-Verletzung beim β -Zerfall von ^{20}Co durch C.S. Wu et al. Phys. Rev. 105, 1413 (1957) durch Landau,

Salam, sowie T.D. Lee und C.N. Yang [Phys. Rev. 105, 1671 (1957)]

wieder aufgegriffen.

Recente Untersuchungen des inversen β -Zerfalls haben gezeigt, dass der Spin des Neutrinos stets antiparallel zu seiner Bewegungsrichtung ausgerichtet ist, der des Antineutrinos ~~antiparallel~~ parallel zu Bewegungsrichtung



(sonst wären die Wirkungsquerschnitte um halb so groß wie die experimentellen Werte).

8.2 Die Weyl-Gleichung

Betrachte zunächst die DE für ein masseloses Teilchen:

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = c \vec{\alpha} \vec{p} \psi(x)} \quad ; \text{ der Term } +\beta mc^2 \text{ fällt weg}$$

Die 3 2×2 Pauli-Matrizen σ^k erfüllen die Antikommutationsrelationen

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \quad ;$$

um die Forderung, auch β als wirklich antikommutierende Matrix einzuführen und so Teilchen mit Masse (speziell: das Elektron) zu beschreiben, hatte bei Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen die Einführung von 4×4 -Matrizen erfordert, und von 4er Spinoren (zwei zweier-Spinoren).

Bei masselosen Teilchen lässt sich demnach (für Spin $\frac{1}{2}$) eine Wellengleichung für einen 2er Spinor $\phi^+(x)$ konstruieren:

$$i\hbar \frac{\partial \phi^+}{\partial t} = c \vec{\sigma} \vec{p} \phi^+(x) ; \sigma^k \hat{=} 2 \times 2 \text{ Pauli-Matrizen}$$

und nach Division durch $i\hbar$ folgt

$$\boxed{\frac{\partial \phi^+}{\partial t} = -c \vec{\sigma} \vec{\nabla} \phi^+(x)} \quad \text{Weyl-Gleichung (für } \phi^+)$$

Lösungen als ebene Wellen sind

$$\phi^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2E(2\pi)^3}} e^{-ipx/\hbar} u^+(p)$$

$$\text{wobei } p = \{p_0, \vec{p}\} = \left\{ \frac{E}{c}, \vec{p} \right\}$$

$$x = \{x_0, \vec{x}\}$$

$$p \cdot x = p_0 x_0 - \vec{p} \cdot \vec{x}$$

Die Neutrino-Wellenfunktionen sind dabei so normiert, dass die Norm invariant unter Lorentz-Transformation ist.

Der 2komponentige Spinor $u^+(p)$ erfüllt die gl.

$$\boxed{p_0 u^+ = \vec{\sigma} \vec{p} u^+}$$

dh. die Lösung zu $p_0 c = E$ entspricht (je nach Vorzeichen des Energie E) einer bestimmten Orientierung des Spins $\vec{\sigma}$ relativ zur Bewegungsrichtung \vec{p} .

Wenden wir den sog. Helizitätsoperator

$$\vec{\sigma} \vec{p} / |\vec{p}|$$

auf beide Seiten der Gleichung an, so erhalten wir mit der Relation

$$(\vec{\sigma} \vec{A})(\vec{\sigma} \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i \vec{\sigma} (\vec{A} \times \vec{B})$$

$$\Rightarrow (\vec{\sigma} \vec{p})^2 \Rightarrow (p_0^2 - \vec{p}^2) u^+ = 0$$

$\Rightarrow \exists$ nichtverschwindende Lösung für u nur für

$$\boxed{p_0 = \pm |\vec{p}|} = \frac{E}{c}$$

das ist die relativistische Energie der masselosen Teilchen, die Teilchen bewegen sich dabei mit c .

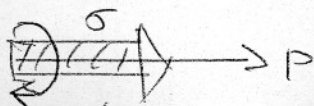
mit der z-Achse in Impulsrichtung \vec{p} wird die Lösung von $p_0 u^+ = \vec{\sigma} \vec{p} u^+$:

$$\boxed{u^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

d.h. rechtshändige masselose Teilchen mit Spin in Bewegungsrichtung, also

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} u^+ = \sigma_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow Der Helizitätsoperator hat einen positiven Eigenwert $+1$, der Spin ist also parallel zu \vec{p} : das entspricht einer Rechtsschraube, wenn wir in

Bewegungsrichtung (\vec{p}) blicken: 

Das Neutrino ist jedoch $|\vec{p}|$ ein linksdrehendes...

⇒ Für Zustände mit positiver Energie $p_0 = +|\vec{p}|$ hat die Weyl-Gleichung nur Wellen positiver Helizität als Lösung, für Zustände mit neg. Energie $p_0 = -|\vec{p}|$ nur Wellen mit neg. Helizität.

Dies ist auch in der "Lochtheorie" gültig: dort ^{entspricht} ~~hat~~ eine Wellenfunktion mit neg. Energie, neg. Impuls, und neg. Spinrichtung einem Antiteilchen mit pos. Energie, pos. Impuls, und pos. Spinrichtung: Eine solche Zuordnung widerspricht den Experimenten zur schwachen Wechselwirkung.

Um also masselose lichtartige Teilchen beschreiben zu können, müssen wir oben die Gleichung anpassen

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \Phi^-}{\partial t} = -c \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \Phi^-(x)} \quad \text{Weyl-Gleichung (für } \Phi^- \text{)}$$

Die Ersetzung $\vec{\sigma} \rightarrow -\vec{\sigma}$ liefert ebenfalls die Antikommutationsrelation $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}$, so dass die Gleichung eine mögliche DE für masselose Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen ist.

Der Ansatz $\Phi^-(x) = \frac{1}{\sqrt{2E(2\pi)^3}} e^{-ipx/\hbar} u^-(p)$

liefert

$$p_0 u^- = -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} u^-$$

$$u^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wieder kann $p_0 = \frac{E}{c}$ positiv oder negativ sein; Die Lösung Φ^- beschreibt lichtartige masselose Teilchen mit negativer Helizität, also Neutrinos im verdreifachten Modell mit $m_\nu \equiv 0$.

Das Spin ist jetzt antiparallel zum Impuls
 (linksschraube); für den Antineutrino-Zustand
 mit $p_0 < 0$ ist es umgekehrt (Rechtsschraube).

β -Zerfallsexperimente zeigen, dass das Neutrino-Spin
 stets antiparallel zu seiner Bewegungsrichtung steht:

Die Helizität (oder longitudinale Polarisation) eines
Neutrinos mit positiver Energie ist negativ, bei negativer
 Energie dagegen positiv.

Da es bei den Lösungen ϕ^+ des DE umgekehrt war,
 lässt sich ϕ^+ mit dem Antineutrino von ϕ^- identifizieren.

Beachte jedoch, dass die Links-/Rechtshändigkeit von
 Neutrino/Antineutrino nur für $m_\nu = m_{\bar{\nu}} \equiv 0$ gilt!

Die Neutrino-Stromdichte erhalten wir aus

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi^-}{\partial t} - \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \phi^- = 0$$

Bei Kombination von $\vec{\sigma}$ und $\mathbb{1}$ zu einem Ableiten

$\sigma_\mu = \{\mathbb{1}, \vec{\sigma}\}$ lässt sich die Weyl-Gleichung
 kompakter schreiben:

$$\sigma_\mu \nabla^\mu \phi^- = 0$$

und die hermitesche konjugierte Gleichung wird

$$\nabla^\mu (\phi^-)^\dagger \sigma_\mu = 0.$$

Multiplikation der ersten Gleichung von links mit $(\phi^-)^+$, der zweiten von rechts mit ϕ^- und Addition ergibt

$$\nabla^\mu (\phi^-)^+ \sigma_\mu \phi^- = 0$$

$\hat{=}$ Kontinuitätsgleichung für den 4er Strom

$j_\mu = (\phi^-)^+ \sigma_\mu \phi^-$, mit einer zeitartigen und raumartigen Komponente

$$\rho = (\phi^-)^+ \phi^-$$

$$\vec{j} = -(\phi^-)^+ \vec{\sigma} \phi^-$$

Die Normierungskonstante der Neutrino Wellenfunktion folgt aus

$$\int \rho d^3x = 1$$

Die 2-komponentige Weyl-Theorie ist nicht invariant gegenüber Paritätstransformationen:

$$\begin{array}{l}
P: \left. \begin{array}{l} \vec{p} \rightarrow -\vec{p} \\ \vec{x} \rightarrow -\vec{x} \\ \vec{\sigma} \rightarrow \vec{\sigma} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ein Zustand mit Energie } p_0 = |\vec{p}|, \\ \text{Impuls } \vec{p} \\ \text{Helizität } \vec{\sigma} \cdot \vec{p} / |\vec{p}| = 1 \end{array}
\end{array}$$

Wird eladisch transformiert in einen Zustand mit $p_0 = |\vec{p}|$, Impuls $-\vec{p}$, Helizität -1 . Ein dazwischen Zustand existiert jedoch nicht in dieser 2-komponenten Theorie masseloser Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen \Rightarrow P-Invarianz muss verletzt sein.

9. Grundzüge der Quantenelektrodynamik

9.1 Einführung

Dirac-Gleichung und Maxwell-Gleichungen liefern gemeinsam eine Theorie des Elektromagnetismus. Dabei müssen jedoch die Quantenpostulate berücksichtigt - d.h. das Feld quantisiert - werden; die daraus resultierende Quantenfeldtheorie des Elektromagnetismus heißt Quantenelektrodynamik, QED. Sie beschreibt alle Phänomene, die von geladenen Punktteilchen wie Elektronen und Positronen, und von Photonen verursacht werden. Sie umfasst Quantenphänomene in der Struktur der Atome (siehe Lambshift!) und Moleküle, und auch Vorgänge in der Hochenergiephysik wie die Erzeugung von Teilchen durch ein elektromagnetisches Feld. Die Berechnung des anomalen magnetischen Moments des Elektronen (siehe S. 53) auf 10 Dezimalstellen genau ist der beste Erfolg der QED. Sie ist die am genauesten experimentell überprüfte physikalische Theorie.

Die Grundgleichungen des em. Feldes - die dann quantisiert werden müssen - sind die Maxwell-Gleichungen (im Gauß-System), die Ampèresches, Faradaysches u. Gaußsches

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

zusammenfassen und schreiben:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{keine magn. Monopole})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$$

$\rho =$ Ladungsdichte
 $\vec{j} =$ Stromdichte
 \vec{E}, \vec{B} elektr. u. magnet. Feldvektor;
 mit Materie siehe ED-Vorlesung

Die Coulomb-Energie zwischen zwei Elektronen ist (Abstand r)

$$E_C = \frac{e^2}{r}$$

die Stärke der em. Wechselwirkung ist durch den dimensionslosen Faktor

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = 1/137.035999679(94)$$

charakterisiert, die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante.

(Bei einer hochenergetischen Teilchenkollision im Beschleuniger steigt mit wachsendem Impulsübertrag Q^2 die effektive Kopplungsstärke an, bei $Q^2 \approx m_W^2 \approx 6.4 \text{ TeV}^2$ beträgt sie etwa $1/128$).

Informationen über eine mögliche zeitabhängigkeit von α sind bis heute unklar. Aus Absorptionslinien des Lichts entfernter Quasare im Rotverschiebungsbereich $z = 3,5 \dots 0,5$ ($\sim 10^{10}$ Jahre des Alters des Universums) wurde eine

Abweichung $\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \approx -0,5 \cdot 10^{-5}$ deduziert ($S_{1/2} \rightarrow P_{1/2, 3/2}$ Übergänge) (Webb et al. 2001; Murphy et al 2003 : $0,2 < z < 4,2$), d.h.

α hätte im frühen Universum einen Wert von $\sim 1/137,037$ statt $1/137,036$ gehabt.

Messungen mit Atomuhren, insbes. Frequenzverhältnisse von Quecksilber- u. Aluminiumuhren (Boude, MIST, J. Bergquist et al., Science 319, 1808 (2008)) ergaben im Widerspruch dazu

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} < 1,6 \cdot 10^{-17} \text{ für die jährliche Variation.}$$

$\Rightarrow \alpha$ ist mit hoher Wahrscheinlichkeit zeitlich konstant.

Die Kleinheit der Kopplungskonstanten, $\alpha \approx 0.0073$, ist entscheidend für den Erfolg der QED, bei der Reihenentwicklungen in α gemacht werden.

Beispielsweise liefert die Theorie für die Anomalie a_e des magnetischen Moments der Elektronen, (s.S. 53)

$$\mu_e = \frac{1}{2} g_e \frac{e}{2mc}, \quad g_e = 2a_e + 2, \text{ exp. Wert:}$$

$$a_e^{\text{exp.}} = \frac{1}{2} (g_e - 2)^{\text{exp.}} = 0.00115965218085(76) \quad \textcircled{1}$$

eine Reihenentwicklung in α mit Entwicklungskoeffizienten C_k ,

$$a_e = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\pi} + C_2 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + C_3 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 + C_4 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 + \dots$$

≈ 0.00116

J. Schwinger hat 1948 als Erster den Term erster Ordnung $\alpha/2\pi$ berechnet $\textcircled{1}$. Inzwischen sind die Entwicklungskoeffizienten bis C_4 bekannt. Zusammen mit dem experimentellen

Wert $\textcircled{2}$ von g_e^{exp} (bzw. a_e^{exp}) folgt daraus der bisher genaueste Wert für die Feinstrukturkonstante α

$$\alpha^{-1} = 137.035999710(96) \quad \textcircled{3}$$

[Kombiniert man die Messungen, ergibt sich (2008)

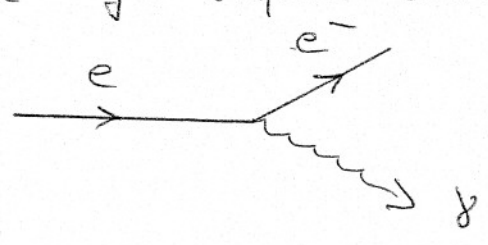
$$\alpha^{-1} = 137.035999679(94), \text{ siehe Particle Data Group}]$$

$\textcircled{1}$ J. Schwinger, Phys. Rev. 73, 416L (1948).
 $\textcircled{2}$ B. Odom et al., Phys. Rev. Lett. 97, 030801 (2006)
 $\textcircled{3}$ G. Gabrielse et al., Phys. Rev. Lett. 97, 030802 (2006)

Physikalischer Bild der QED:

Klassische ED:

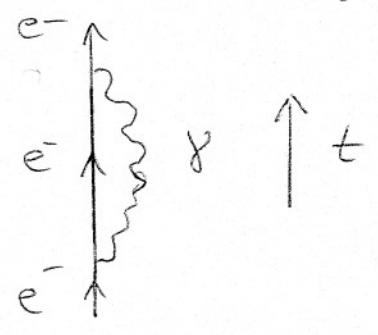
beschleunigte Ladungen emittieren em. Strahlung -
ein Elektron in Ruhe oder in geradlinig beschleunigter
Bewegung kann dagegen kein Photon emittieren
(Energie-Impuls-Erhaltung!)



In der Quantentheorie gibt jedoch die Energie-Zeit-
Unschärfenrelation,

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar,$$

so dass auch ein ruhendes Elektron ein Photon
ausstrahlen kann: Die Verletzung der Energieerhaltung
ist erlaubt, wenn das Photon nach einer Zeit $\Delta t \sim \hbar/\Delta E$
wieder absorbiert wird,



Davon temporär existierende Photonen
nennt man virtuelle Photonen

In der QED ist jedes geladene Teilchen von einer
"Wolke" ausartigen virtueller Photonen umgeben.
Die Amplitude für die γ -Emission ist $\propto e$,
die Wahrscheinlichkeit $\propto \alpha$.

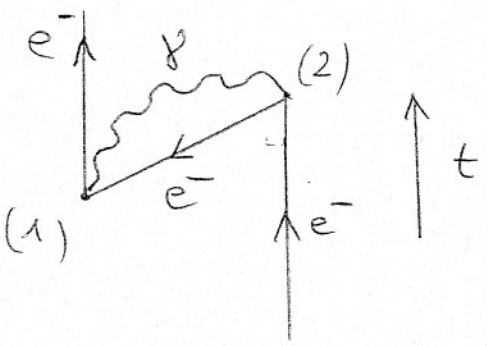
Der Dirac-Wert für das magn. Moment der Elektron,

$g_e = 2$ entspricht einem "nackten" Elektron.

Wird ein virtuelles Photon emittiert, entsteht ein Rückstoß - und da das Elektron geladen ist, eine Stromverteilung; dieser Konvektionsstrom liefert einen Zusatz zum Dirac-Wert.

Da die Wahrscheinlichkeit, ein virtuelles Photon zu finden, proportional zu α , sind sowohl der Strom, als auch der Beitrag zu a_e in 1. Ordnung proportional zu α , wie in Schwinger's Resultat.

Der Rückstoß kann auch so erfolgen, dass das Elektron "in der Zeit zurückläuft":



bei (1) entsteht ein e^-e^+ -Paar mit Ausendung eines virtuellen Photons; das e^- läuft ins Unendliche, das e^+ wird mit dem einlaufenden e^- unter Re-Absorption des virtuellen Photons bei (2) vernichtet.

(Die Interpretation von in der Zeit zurücklaufenden Elektronenlinien als Positronen hat Stueckelberg 1941 vorgeschlagen, Helv. Phys. Acta 14, 322 (1941).

Auch andere Effekte wie die Lamb-Shift und der Casimir-Effekt lassen sich durch den Einfluss der virtuellen Photonen verstehen. Die quantitative Berechnung erwies sich als schwierig: Es ergaben sich unendliche Resultate, wenn man nach der Störperturbation in der nichtrel. QM vorgeht. Die von Feynman, Schwinger, und Tomonaga entwickelte Renormierungstheorie löst dieses Problem (NP 1965, "for their fundamental work in quantum electrodynamics, with deep-ploughing of consequences for the physics of elementary particles").

Die Quantenelektrodynamik und die Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung sind ebenfalls nach dem Ansatz der QED konstruiert.

9.2 Quantisierung der freien em. Felder

In der relativistischen Formulierung werden elektrische und magnetische Feldstärke zum Feldstärketensor zusammengefasst, Ladungs- und Stromdichte zur Vierstromdichte:

$$\begin{matrix}
 \uparrow \uparrow \\
 \text{Zeile} \quad \text{Spalte}
 \end{matrix}
 \left(F_{\mu\nu} \right) = \begin{pmatrix}
 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\
 E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\
 E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\
 E^3 & -B^2 & B^1 & 0
 \end{pmatrix}$$

Feldstärketensor;

$$j^\mu = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} \text{ Vierstromdichte}$$

Skalares Potential ϕ und Vektorpotential \vec{A} fassen wir zum 4er Potential zusammen,

$$(A^\mu) = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$$

Die Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ wird

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad (\partial_\mu) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$$

Aus dem Vektorpotential folgen die Felder \vec{E} und \vec{B} ,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Insbesondere ist

$$B_1 = \frac{\partial A^3}{\partial x_2} - \frac{\partial A^2}{\partial x_3} = \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3$$

$$E_{-1} = -\frac{\partial A^0}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_0} = \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1$$

und der antisymmetrische Feldtensor wird

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

mit $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$

und den auf der rechten Seite gezeigten Komponenten.
(Dabei gibt es in A^μ noch die Eichfreiheit

Maxwell-Gleichungen

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x)$$

mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$ ist

$$\partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \frac{4\pi}{c} j^0$$

Die 1-Komponente von

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3} - \frac{\partial E_1}{\partial x^0} = \frac{4\pi}{c} j^1$$

und analog für die anderen Komponenten,
zusammengefasst

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \text{ oder } \partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\nu$$

Mit der Potentialdarstellung des Feldtensors

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \text{ folgt}$$

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

In der sog. Lorenz-Eichung ist

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \dot{\phi} = 0 \quad \times$$

$\partial_\mu A^\mu = 0$, d.h. die Divergenz des 4er Potentials
verschwindet in der L.E., und die $F^{\mu\nu}$ sind jetzt
eindeutig festgelegt.

$$\Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

$$\square A^\nu = - \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

$$\square = -\partial_\mu \partial^\mu = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 + \Delta$$

d'Alembert-Operator

für die inhomogenen Maxwell-Gleichungen.

Analog für die homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\partial^1 B_1 + \partial^2 B_2 + \partial^3 B_3 = 0$$

$$-\partial_1 F^{32} - \partial_2 F^{13} + \partial_3 F^{21} = 0$$
$$= \partial_1 F^{23} + \partial_2 F^{31} + \partial_3 F^{12} = 0$$

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)_x = 0$$

$$\Rightarrow -\partial_2 F^{30} - \partial_3 F^{02} - \partial_0 F^{23} = 0$$

Zusammengefasst

$$\partial_\lambda F^{\mu\nu} + \partial_\mu F^{\nu\lambda} + \partial_\nu F^{\lambda\mu} = 0$$

Bianchi-Identität

(nur für $\lambda \neq \mu \neq \nu$ nicht trivial; für gleiche Indices identisch erfüllt)

Dies lässt sich mit Hilfe des dualen Feldtensors $\widetilde{F}^{\mu\nu}$

analog wie bei den inhomogenen Gleichungen

Zusammenfassen:

$$\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

$$\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}$$

↳ = 0 bei zwei gleichen Indices, sonst
Vorzeichenänderung beim Vertauschen
zweier Indices
 $\epsilon^{0123} = 1$, Normierung

Wir untersuchen jetzt das freie Photonenfeld,
ohne äußere Quellen: $j^\nu \equiv 0$

Dann erfüllt das Vektorpotential die
d'Alembert-Gleichung

$$\square A^\mu = 0$$

In der Quantentheorie ist das eine Operatorgleichung.
Für den Feldoperator A_μ gilt dann eine Entwicklung
mit operatorwertigen Entwicklungskoeffizienten,

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \cdot 2\omega} \left\{ e^{ikx} a_\mu(\vec{k}) + e^{-ikx} a_\mu^\dagger(\vec{k}) \right\}$$

wobei

$$k = \begin{pmatrix} \omega \\ \vec{k} \end{pmatrix}, \quad \omega = |\vec{k}|$$

$$kx = k^\mu x_\mu = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$$

und für die Vertauschungsrelationen der
Erzeugnis- und Vernichtungsoperatoren a^\dagger, a gilt:

$$[a_\mu^\dagger(\vec{k}), a_\nu^\dagger(\vec{k}')] = 0$$

$$[a_\mu(\vec{k}), a_\nu(\vec{k}')] = 0$$

$$[a_\mu(\vec{k}), a_\nu^\dagger(\vec{k}')] = z_{\mu\nu} (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$$

mit zunächst noch unbekanntem konstanten $z_{\mu\nu}$.

Für den Vakuumzustand im Fock-Raum gilt

$$a_\mu(\vec{k})|0\rangle = 0 \quad \forall \mu, k$$

die Indices μ, ν sind 4er Vektor-Indices, und die konstanten $Z_{\mu\nu}$ bilden einen Lorentz-Tensor 2. Stufe. Wegen der geforderten Lorentz-Kovarianz muss er ein konstanter Tensor sein; der einzige Tensor dieses Art ist ein metrischer Tensor.

$$\Rightarrow (Z_{\mu\nu}) = \pm (g_{\mu\nu}) = (\pm) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Mit

$$[a_\mu(\vec{k}), a_\nu^\dagger(\vec{k}')] = -g_{\mu\nu} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$$

$\Rightarrow a_\mu^\dagger$ ($\mu=1,2,3$) ergibt - angewandt auf das Vakuum - einen Zustand positiver Norm, jedoch

$a_0^\dagger |0\rangle$ ergibt einen Zustand negativer Norm
(\Rightarrow die Wahrscheinlichkeits-
Interpretation gilt nicht)

\Rightarrow die Metrik ist unbestimmt.

Gupta und Bleuler (1950) haben ein Verfahren angegeben, um Zustände positiver Norm zu erzeugen, (und gleichzeitig zwei der linear unabhängigen Polarisationenzustände zu eliminieren: ein reelles Photon hat nur zwei Polarisations-freiheitsgrade!).

Die Fourier-Entwicklung für den Feldoperator A_μ ,

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left\{ e^{ikx} a_\mu^+(\vec{k}) + e^{-ikx} a_\mu(\vec{k}) \right\}$$

erfüllt zunächst nur die d'Alambert-Gleichung,

$$\square A_\mu = 0 \quad \text{in Operatorform.}$$

Sie ist nur zusammen mit der Lorentz-Bedingung

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

äquivalent zu den Maxwell-Gleichungen;

also muss auch die Lorentz-Bedingung in die

Quantenmechanik übertragen werden. Sie kann

jedoch nicht direkt in Operatorform gebracht werden,

man fordert stattdessen die Lorentz-Bedingung als

Nebenbedingung für Zustände:

Nur diejenigen Zustände im Fock-Raum sind

physikalisch, die die LB erfüllen:

Wir berücksichtigen nur den Teil des 4er Potentials,
das nur Annihilationsoperatoren enthält,

$$A_\mu^{(-)}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} e^{-ikx} a_\mu(\vec{k}), \quad \text{und fordern}$$

$$\partial^\mu A_\mu^{(-)}(x) |\text{physik. Zustand}\rangle = 0$$

bzw. für die Fourier-Komponenten

$$k^\mu a_\mu(\vec{k}) | \text{phys. Zustand} \rangle = 0 \quad \forall \vec{k}.$$

⇒ der Erwartungswert der Divergenz der gesamten Felder $\partial^\mu A_\mu(x)$ verschwindet für beliebige physikalische Zustandsvektoren:

$$\langle \text{phys. Zustand} | \partial^\mu A_\mu(x) | \text{phys. Zustand} \rangle = 0$$

(Anteil in $\partial^\mu A_\mu(x)$ mit Erzeugungsoperatoren nach links wirken lassen!)

Der Unterraum der physikalischen Zustandsvektoren ist linear. Seine Metrik ist positiv semidefinit:

$$\langle \text{phys. Zustand} | \text{phys. Zustand} \rangle \geq 0$$

Beweis:

Wähle eine Basis für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:

Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \perp \vec{k} : \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$
 $\vec{e}_3 = \vec{k} / |\vec{k}| = \hat{k}$

Operatoren:

$$a_0^+(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [a_0^+(\vec{k}) - \hat{k} \vec{a}^+(\vec{k})]$$

$$a_1^+(\vec{k}) = \vec{e}_1 \vec{a}^+(\vec{k})$$

$$a_2^+(\vec{k}) = \vec{e}_2 \vec{a}^+(\vec{k})$$

$$a_3^+(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [a_0^+(\vec{k}) + \hat{k} \vec{a}^+(\vec{k})]$$

Und aus den Vertauschungsregeln für die a 's
 folgen die VR. für die α 's:

$$[\alpha_0(\vec{k}), \alpha_0^+(\vec{k}')] = [\alpha_3(\vec{k}), \alpha_3^+(\vec{k}')] = 0$$

$$[\alpha_0(\vec{k}), \alpha_3^+(\vec{k}')] = [\alpha_3(\vec{k}), \alpha_0^+(\vec{k}')] = - (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$[\alpha_1(\vec{k}), \alpha_1^+(\vec{k}')] = [\alpha_2(\vec{k}), \alpha_2^+(\vec{k}')] = (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$$

(alle anderen Kommutatoren = 0)

Die LB als Nebenbedingung wird

$$\alpha_0(\vec{k}) | \text{phys. Zustand} \rangle = 0$$

Ein Zustandsvektor im Hilbert-Raum löst sich als
 beliebiges Produkt von Erzeugungsoperatoren angewandt
 auf das Vakuum darstellen:

$$\alpha_1^+(\vec{k}_1) \alpha_1^+(\vec{k}_2) \dots \alpha_2^+ \dots \alpha_0^+ \dots \alpha_3^+ \dots |0\rangle$$

Jedoch ist die LB dann und nur dann erfüllt,
 wenn dabei keine Operatoren α_3^+ vorkommen (wegen der
 Vertauschungsregeln).

Physikalische Zustandsvektoren sind z.B.

$$\alpha_1^+(\vec{k}) |0\rangle, \alpha_2^+(\vec{k}) |0\rangle, \alpha_0^+(\vec{k}) |0\rangle$$

sie sind zueinander orthogonal, die Längenquadrate
 sind ≥ 0 :

$$\langle 0 | \alpha_1(\vec{k}) \alpha_1^+(\vec{k}') |0\rangle = (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$\langle 0 | \alpha_2(\vec{k}) \alpha_2^+(\vec{k}') |0\rangle = (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$$

$$\langle 0 | \alpha_0(\vec{k}) \alpha_0^+(\vec{k}') |0\rangle = 0$$

Auch alle anderen Längenquadrate von Zustandsvektoren, die kein α_3^+ enthalten, sind ≥ 0 :

$$\langle \text{phys. Zustand} | \text{phys. Zustand} \rangle \geq 0$$

(s. Literatur zur Diskussion des Hilbert-Raumes mit positiv definiten Metrik) "Äquivalenzklassen" von Zustandsvektoren).

Mit Berücksichtigung der Quantenpostulate durch die Vertauschungsrelationen lassen sich nun Erwartungswerte physikalischer Größen berechnen.

Die Feldstärken - Erwartungswerte

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \dot{\vec{A}}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{werden}$$

$$\langle \vec{B}(x) \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left\{ e^{ikx} \langle -i\vec{k} \times [\vec{e}_1 \alpha_1^+(\vec{k}) + \vec{e}_2 \alpha_2^+(\vec{k})] \rangle + e^{-ikx} \langle i\vec{k} \times [\vec{e}_1 \alpha_1(\vec{k}) + \vec{e}_2 \alpha_2(\vec{k})] \rangle \right\}$$

$$\langle \vec{E}(x) \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left\{ -i\omega e^{ikx} \langle \vec{e}_1 \alpha_1^+(\vec{k}) + \vec{e}_2 \alpha_2^+(\vec{k}) \rangle + i\omega e^{-ikx} \langle \vec{e}_1 \alpha_1(\vec{k}) + \vec{e}_2 \alpha_2(\vec{k}) \rangle \right\}$$

Es tragen - in Übereinstimmung mit dem Experiment - nur die transversalen Freiheitsgrade der Photonen bei.

Die Operatoren für Energie und Impuls von Photonen folgen aus den klassischen Ausdrücken,

$$P^0 = \int d^3x \cdot \frac{1}{2} [\vec{E}^2(x) + \vec{B}^2(x)]$$

$t = \text{const}$

$$\vec{P} = \int d^3x [\vec{E}(x) \times \vec{B}(x)]$$

$t = \text{const}$

Mit \vec{E} und \vec{B} als Feldoperatoren lassen sich die Erwartungswerte von Energie und Impuls berechnen - jedoch ergeben sich zumeist divergente Resultate.
Um sie zu vermeiden, ersetzt man den Energieoperator durch

$$P^0 \equiv P'^0 - \langle 0 | P'^0 | 0 \rangle,$$

dh. wir wählen die Vakuumenergie als Nullpunkt der Energiezählung (das ist dh., dass gemessen werden Energiedifferenzen).

Die Erwartungswerte des "neuen" Energieoperators sind nicht divergent.

Die Subtraktion der Vakuumenergie erfolgt automatisch, wenn wir das "normalgeordnete" Produkt der Feldoperatoren verwenden ("Doppelpunkte"):
alle Erzeugungsoperatoren wirken so, als stünden sie links von allen Vertilgungsoperatoren, also z.B.

$$\boxed{: a a^\dagger : \equiv a^\dagger a}, \text{ etc}$$

"Normalprodukt"

zB gilt für die elektrische Feldstärke

$$\vec{E}(x) \sim a^\dagger + a$$

so dass

$$\begin{aligned}
\therefore \vec{E}^2(x) \therefore &\sim \therefore (a^\dagger + a)(a^\dagger + a) \therefore \\
&= \therefore a^\dagger a^\dagger + a^\dagger a + a a^\dagger + a a \therefore \\
&= a^\dagger a^\dagger + 2a^\dagger a + a a
\end{aligned}$$

und die korrekten Ausdrücke für Energie und Impuls werden

$$P^0 = \int_{t=\text{const}} d^3x \frac{1}{2} \therefore [\vec{E}^2(x) + \vec{B}^2(x)] \therefore$$

$$\vec{P} = \int_{t=\text{const}} d^3x \therefore \vec{E}(x) \times \vec{B}(x) \therefore$$

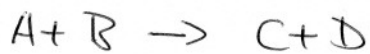
Erwartungswerte des Viererpotentials sind nicht direkt beobachtbar; für das gewöhnliche Viererprodukt zweier Viererpotentiale ergibt sich

$$\langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle = -g_{\mu\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} e^{-ik(x-y)}$$

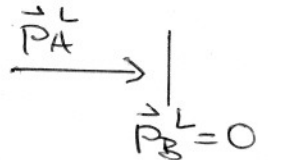
mit $k = \begin{pmatrix} |\vec{k}| \\ \omega \\ \vec{k} \end{pmatrix}$.

10. Elemente der relativistischen Streutheorie

10.1 Invarianten bei relativistischen Reaktionen



CMs: $\vec{p}_A + \vec{p}_B \rightarrow \vec{p}_C + \vec{p}_D$  "collider"

LS: $\vec{p}_A^L + \vec{p}_B^L \rightarrow \vec{p}_C^L + \vec{p}_D^L$  "fixed target"

Viererimpulserhaltung ($\hat{=}$ Energie- und Impulserhaltung):

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{p}_C + \vec{p}_D$$

Mit der zusätzlichen Bedingung ($t \equiv c \equiv 1$)

$$p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$$

Die Teilchen sind "auf der Massenschale":

$$p_A^2 = m_A^2, p_B^2 = m_B^2, p_C^2 = m_C^2, p_D^2 = m_D^2.$$

Man führt 3 Lorentz-invariante sog. Mandelstam-Variable ein:

Das Quadrat der Schwerpunktsenergie,

$$\boxed{s = (p_A + p_B)^2 = (p_C + p_D)^2} = E_{cm}^2 = (E_A + E_B)^2 = (E_C + E_D)^2$$

sowie die folgenden Quadrate von 4er Impulstransfer

$$\boxed{t = (p_A - p_C)^2 = (p_B - p_D)^2}$$
$$\boxed{u = (p_A - p_D)^2 = (p_C - p_B)^2}$$

Wegen des Constraints $p_i^2 = m_i^2$ sind die drei Mandelstam-Variable nicht unabhängig voneinander,

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2$$

Für die invariante Größe s gilt im Schwerpunktsystem (CMS)

$$\begin{aligned}
s &= (p_A + p_B)^2 = (E_A + E_B)^2 - \underbrace{(\vec{p}_A + \vec{p}_B)^2}_{= 0 \text{ im CMS}} \\
&= (E_A + E_B)^2
\end{aligned}$$

Im Laborsystem (LS) wird dieselbe Größe mit

$$p_A^L = (E_A^L, \vec{p}_A^L)$$

$$p_B^L = (E_B^L, \vec{p}_B^L) = (m_B, 0) :$$

$$\begin{aligned}
s &= (p_A^L + p_B^L)^2 = [E_A^L + m_B]^2 - (p_A^L)^2 = \\
&= (E_A^L)^2 + 2m_B E_A^L + m_B^2 - (p_A^L)^2
\end{aligned}$$

und mit

$$(E_A^L)^2 - (\vec{p}_A^L)^2 = m_A^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{s = m_A^2 + m_B^2 + 2m_B E_A^L}$$

Mit s ist auch die cm-Energie $\sqrt{s} \equiv E_{cm}$ relativistische invariant.

Die kinetische Energie des einfallenden Teilchens "A" ist im Laborsystem

$$k_A^L = E_A^L - m_A \Rightarrow E_A^L = k_A^L + m_A$$

$$\Rightarrow \boxed{S = (m_A + m_B)^2 + 2m_B k_A^L}$$

damit wird die kinetische Energie im Schwerpunktsystem

$$k_{cm} = \sqrt{S} - m_A - m_B = (m_A + m_B) \sqrt{1 + \frac{2m_B k_A^L}{(m_A + m_B)^2}} - m_A - m_B$$

und in nichtrelativistischer Näherung (nr)

$$\underline{k_A^L \ll m_A + m_B}, \quad k_A \rightarrow k_A^{nr}$$

$$\Rightarrow k_{cm}^{nr} \approx (m_A + m_B) \left[1 + \frac{m_B k_A^L}{(m_A + m_B)^2} \right] - m_A - m_B = (m_A + m_B) \frac{m_B k_A^L}{(m_A + m_B)^2}$$

$$\boxed{k_{cm}^{nr} = \frac{m_B}{m_A + m_B} k_A^L}$$

(dies ist ein vielbenutzter Ausdruck in der nichtrelativistischen Streutheorie)

Bei hohen relativistischen Energien ist gegeben

$$|\vec{p}_A^L| \gg m_A, m_B$$

und wegen $(E_A^L)^2 - (\vec{p}_A^L)^2 = m_A^2$,

$$E_A^L = \sqrt{(\vec{p}_A^L)^2 + m_A^2}$$

$$\Rightarrow E_A^L \simeq |\vec{p}_A^L|$$

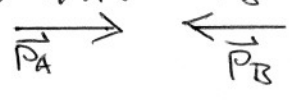
$$\Rightarrow \boxed{s \simeq 2m_B E_A^L \simeq 2m_B |\vec{p}_A^L| \equiv E_{cm}^2}$$

dh. die Schwerpunktenergie wächst nur mit der Wurzel des Labormomentums bei ultra-relativistischen Energien,

$$\sqrt{s} = E_{cm} \propto \sqrt{|\vec{p}_A^L|}$$

\Rightarrow bei hohen Energien sind Collider die bessere Alternative.

Beispiel: p+p am LHC, $|\vec{p}_A| = |\vec{p}_B| = 7 \text{ TeV}/c$
 $m_p \simeq 0.938 \text{ GeV}/c^2$



$$E_A = E_B = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \stackrel{c=1}{\equiv} \sqrt{p^2 + m^2} = \sqrt{49 \cdot 10^6 + 0.88} \text{ GeV}$$

$$\simeq 7000 \text{ GeV} = 7 \text{ TeV}$$

$$s = (E_A + E_B)^2 \simeq 196 \cdot 10^6 \text{ GeV}^2 \Rightarrow \sqrt{s} = \underline{14 \cdot 10^3 \text{ GeV}}$$

Derselbe Wert von s erfordert mit einem festen Target einen Labormoment von $\vec{p}_A \longrightarrow$

$$|\vec{p}_A^L| \simeq \frac{s}{2m_p} = \frac{196 \cdot 10^6}{2 \cdot 0.938} \text{ GeV}/c \simeq 104.48 \cdot 10^6 \text{ GeV}/c = \underline{104.48 \cdot 10^3 \text{ TeV}/c}$$

dh. das \sim 15000 fache des Colliderimpulses, um $\sqrt{s} = 14 \cdot 10^3 \text{ GeV}$ zu erreichen.