Institut für Theoretische Physik — Universität Heidelberg
C. Ewerz, E. Thommes — Sommersemester 2010

8. Übung zur Quantenmechanik

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 08.06.2010
Besprechung der Präsenzaufgaben: 04.06.2010

P 27 Potentialtopf mit Störung (4 Punkte)

Wir wollen die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m im Potential

$$V(x) = \begin{cases} \epsilon \cosh\left(\frac{\pi}{2a}x\right) & \text{für } |x| < a \\ \infty & \text{für } a \leq |x| \end{cases} \tag{1}$$

betrachten, wobei $a \in \mathbb{R}_+$ und $\epsilon \ll 1$. Das Potential $\epsilon \cosh[\pi x/(2a)]$ soll als Störung behandelt werden. Überzeugen Sie sich, daß die Eigenzustände des ungestörten Problems die Wellenfunktionen

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left[\frac{\pi}{2a}(n+1)x\right] & \text{für } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left[\frac{\pi}{2a}(n+1)x\right] & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{2}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ haben. Berechnen Sie die Energieverschiebung des Grundzustands in 1. Ordnung Störungstheorie. Bestimmen Sie die Zustände, die zum Grundzustand in 1. Ordnung beimischen.
Hinweis:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cosh(x)\cos^2(x)dx = \frac{4}{5}\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) \tag{3}$$

S 28 Angeregte Zustände des 1-dim. harmonischen Oszillators (optional, +4 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, daß der Grundzustand $|\psi_0\rangle$ des eindimensionalen harmonischen Oszillators (bis auf Phasenfaktoren) eindeutig bestimmt ist. Zeigen Sie durch Induktion, daß auch die angeregten Zustände $|\psi_n\rangle$ bis auf Phasenfaktoren eindeutig sind.
Hinweis: Verwenden Sie die Operatoren $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^\dagger$ und $\mathbf{N}$ aus Aufg. 19. Starten Sie beim Induktionsschritt mit einer Menge von Eigenzuständen $|\psi^i_{n+1}\rangle$ des Operators $\mathbf{N}$ zum Eigenwert $n+1$. Durch sukzessive Anwendung der Operatoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^\dagger$ können Sie dann finden, daß die Zustände $|\psi^i_{n+1}\rangle$ mit verschiedenen i zueinander proportional sein müssen, woraus sich die Eindeutigkeit des angeregten Zustands $|\psi_n\rangle$ ableiten läßt.

S 29 Kohärenter Zustand im harmonischen Oszillator II (5+4 Punkte)

Wir betrachten noch einmal den kohärenten Zustand im eindimensionalen harmonischen Oszillator (s. Aufg. 21) und verwenden die bekannten Operatoren $\mathbf{H}$, $\mathbf{A}$ etc. Für $c \in \mathbb{C}$ sei der kohärente Zustand wieder gegeben durch

$$|\phi_c\rangle = e^{-|c|^2/2} \exp\left(c\mathbf{A}^\dagger\right) |\psi_0\rangle = e^{-|c|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{\sqrt{n!}} |\psi_n\rangle \ . \tag{4}$$

Nach Aufg. 21(c) gilt $\mathbf{A}\,|\phi_c\rangle = c\,|\phi_c\rangle$.

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\mathbf{H}\rangle_c$ des Hamiltonoperators in diesem Zustand. Welche Werte kann dieser Erwartungswert für allgemeines $c \in \mathbb{C}$ annehmen?

(b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\mathbf{Q}\rangle_c$ und $\langle\mathbf{P}\rangle_c$ des Orts- und des Impulsoperators im Zustand $|\phi_c\rangle$.

(c) (optional, +2 Punkte)
Bestimmen Sie die Schwankungsquadrate der Operatoren $\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}$ und $\mathbf{H}$ sowie das Schwankungsprodukt $(\Delta\mathbf{Q})_c(\Delta\mathbf{P})_c$ im Zustand $|\phi_c\rangle$.

(d) (optional, +1 Punkt)
Zeigen Sie, daß für beliebige $c, c' \in \mathbb{C}$ gilt $\langle\phi_c|\phi_{c'}\rangle \neq 0$. Warum steht dies nicht im Widerspruch zum Resultat von Aufg. 21(c)?

(e) Wir wollen annehmen, daß der harmonische Oszillator zur Zeit $t = 0$ in einem kohärenten Zustand ist, d. h. $|\psi(t=0)\rangle = |\phi_{c_0}\rangle$. Zeigen Sie, daß der Zustand dann zur Zeit t die Form

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega t/2} \left|\phi_{c(t)}\right\rangle \qquad \text{mit} \qquad c(t) = c_0 e^{-i\omega t} \tag{5}$$

hat. Folgern Sie (z. B. mit Hilfe der Resultate aus (a) und (b)), daß für diesen Zustand $\langle\mathbf{H}\rangle$ zeitunabhängig ist und daß $\langle\mathbf{Q}\rangle$(t) der klassischen Bewegung im harmonischen Oszillator entspricht.

(f) (optional, +1 Punkt)
Zeigen Sie, daß das so beschriebene Wellenpaket zu allen Zeiten ein minimales Schwankungsprodukt besitzt.

Hinweis: Es ist günstig, die Operatoren $\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}$ und $\mathbf{H}$ durch Auf- und Absteigeoperatoren auszudrücken.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qm10.html