Institut für Theoretische Physik — Universität Heidelberg
C. Ewerz, E. Thommes — Sommersemester 2010

11. Übung zur Quantenmechanik

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 29.06.2010
Besprechung der Präsenzaufgaben: 24./25.06.2010

P 39 Parität und Drehimpuls (4 Punkte)

Wir wollen den Zusammenhang zwischen Parität und Drehimpuls untersuchen. Die Wirkung des Paritätsoperators $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ auf einen Zustand $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ ist in Ortsdarstellung $\boldsymbol{\mathcal{P}}\psi(\vec{x}) = \psi(-\vec{x})$, vgl. Aufg. 24.
Betrachten Sie die dreidimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem rotationssymmetrischen Potential, $\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r)$. Zeigen Sie, daß $[\boldsymbol{\mathcal{P}}, \mathbf{H}] = 0$ und $[\boldsymbol{\mathcal{P}}, \vec{\mathbf{L}}] = 0$, und schließen Sie, daß es simultane Eigenfunktionen von $\mathbf{H}, \vec{\mathbf{L}}^2, \mathbf{L}_3$ und $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ gibt. Zeigen Sie außerdem für $\psi(\vec{x}) = f(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}\psi(\vec{x}) = (-1)^l \psi(\vec{x})\,. \tag{1}$$

Hinweis: Es gilt

$$Y_{ll}(\theta, \varphi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}\,\sin^l\theta\, e^{il\varphi}\,. \tag{2}$$

S 40 Eichinvarianz (5 Punkte)

Der Hamiltonoperator für ein Teilchen der Masse m und der Ladung e im elektromagnetischen Feld ist

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m}\left(\vec{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\Phi\,, \tag{3}$$

worin $\vec{A}$ und Φ die Potentiale für die Felder $\vec{\mathbf{E}}$ und $\vec{\mathbf{B}}$ sind. Zeigen Sie, daß die zeitabhängige Schrödingergleichung ihre Form behält, wenn man eine Eichtransformation der Potentiale,

$$\vec{A} \;\rightarrow\; \vec{A}' = \vec{A} - \nabla\Lambda \tag{4}$$

$$\Phi \;\rightarrow\; \Phi' = \Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} \tag{5}$$

mit einer beliebigen Funktion $\Lambda(\vec{x}, t)$, und gleichzeitig eine lokale Phasentransformation der Wellenfunktion

$$\psi(\vec{x}, t) \;\rightarrow\; \psi'(\vec{x}, t) = \exp\left[-\frac{ie}{\hbar c}\Lambda(\vec{x}, t)\right]\psi(\vec{x}, t) \tag{6}$$

durchführt.

S 41 Endliche Kernausdehnung und atomare Energieniveaus (4 Punkte)

Der Atomkern eines wasserstoffartigen Atoms werde als homogen geladene Kugel der Gesamtladung Ze_0 mit Radius R aufgefaßt. Das Elektron bewegt sich dann im Potential

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{Ze_0^2}{R}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] & \text{für } r \leq R \\ -\frac{Ze_0^2}{r} & \text{für } R < r\,. \end{cases} \tag{7}$$

Behandeln Sie die *Abweichung* des Potentials $V(r)$ vom Coulomb-Potential eines punktförmigen Kerns als Störung und berechnen Sie in Störungsrechnung 1. Ordnung die Energieverschiebung des 1s-Zustands in Abhängigkeit vom Bohrschen Radius a und vom Kernradius R. Dabei können Sie annehmen, daß $R \ll a$. Wie groß ist die Energieverschiebung des Grundzustands beim Wasserstoff ($Z = 1$, $R = 1.2 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$)?

Hinweis:

Die Wellenfunktion des 1s-Zustands im Coulomb-Potential ist (im Ortsraum)

$$\psi_{100}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Zr}{a}} \tag{8}$$

mit dem Bohrschen Radius $a = \hbar^2/(me_0^2) = 0.5 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$. Beachten Sie, daß $e^{-r/a} \simeq 1$ für $r \leq R \ll a$.

S 42 Variationsverfahren und Wasserstoffatom (2+3 Punkte)

Wir wollen das Ritzsche Variationsverfahren am Beispiel des Wasserstoffatoms testen. Sei dazu $\mathbf{H}$ der Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms, d. h. der Hamiltonoperator für die Bewegung eines Elektrons der Ladung $-e_0$ und der Masse m im Coulombpotential einer Kernladung Ze_0. Als Testfunktion wählen wir die (normierte) Grundzustandswellenfunktion eines dreidimensionalen harmonischen Oszillators mit dem Potential $\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$,

$$\psi_0(\vec{x}) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{3}{4}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2\right)\,. \tag{9}$$

(a) Finden Sie damit eine optimale Abschätzung für den Grundzustand des Wasserstoffatoms, indem Sie ω variieren. Vergleichen Sie das Resultat mit der exakten Grundzustandsenergie.

Hinweis: Es gilt

$$\langle \psi_0 \,|\, \mathbf{H}\psi_0 \rangle = \frac{3}{4}\hbar\omega - \frac{2Ze_0^2}{\hbar}\left(\frac{m\hbar\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\,. \tag{10}$$

(b) (optional) (+3 Punkte)

Beweisen Sie Gl. (10) aus Teil (a).

S 43 Aharonov-Bohm-Effekt (5 Punkte)

Elektronen aus einer Quelle bei $\vec{x}_0$ treffen auf eine Doppelspaltanordnung, hinter der ein Schirm aufgestellt ist. Zwischen den beiden Spalten sei eine (unendlich lange) Spule parallel zu den Spalten angebracht, die ein Magnetfeld erzeugt, das auf das Innere der Spule beschränkt ist. Die Spule sei derart abgeschirmt, daß die Elektronen nicht in das Magnetfeld eindringen können.

Der Hamiltonoperator für die Bewegung eines Elektrons im konstanten Magnetfeld $\vec{B}$ ist

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2m}\left(\vec{\mathbf{P}} + \frac{e_0}{c}\vec{A}\right)^2 , \tag{11}$$

wobei $-e_0$ die Elektronladung und $\vec{A}$ ein Vektorpotential für $\vec{B}$ ist, d, h. $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Zeigen Sie zunächst, daß das Vektorpotential ($A \in \mathbb{R}$)

$$\vec{A}(\vec{x}) = \left(-\frac{Ax_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{Ax_1}{x_1^2 + x_2^2}, 0\right) \tag{12}$$

das Magnetfeld obiger Versuchsanordnung beschreibt. Zeigen Sie weiter, daß

$$\psi_B(\vec{x}) = \exp\left(-\frac{ie_0}{\hbar c}\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{A} \cdot d\vec{s}\right)\psi_0(\vec{x}) \tag{13}$$

eine Lösung der Schrödingergleichung mit Magnetfeld ist, wenn $\psi_0(\vec{x})$ eine Lösung der Schrödingergleichung ohne Feld ist. Zeigen Sie mit Hilfe der Ergebnisse der Aufgabe 38, daß sich das Interferenzmuster auf dem Schirm ändert, wenn das Magnetfeld in der Spule ein- bzw. ausgeschaltet wird.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/∼ewerz/qm10.html