Institut für Theoretische Physik
H. G. Dosch

Universität Heidelberg
Sommersemester 2001

5. Übung zur Quantenmechanik

Abgabe der Hausübungen: 30. Mai in der Vorlesung
Besprechung der Präsenzübungen: 25. Mai

P 16 Delta-Distribution (3 Punkte)

Wir betrachten Distributionen in einer Dimension.

(a) Berechnen Sie die zweite Ableitung von $x\theta(x)$.

(b) Zeigen Sie für $a \neq 0$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)\,. \tag{1}$$

(c) Zeigen Sie, daß die Delta–Funktion eine Darstellung mittels der Gaußkurve besitzt, d. h.

$$\lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right] = \delta(x-x_0)\,. \tag{2}$$

H 17 Eindimensionale Potentialbarriere (5 Punkte)

Wir betrachten eine eindimensionale Potentialbarriere der Höhe $V_0 \in \mathbb{R}_+$ und der Tiefe $a \in \mathbb{R}_+$. Der Hamiltonoperator für ein Teilchen der Masse m ist im Ortsraum

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \tag{3}$$

mit dem Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V_0 & \text{für } 0 \leq x \leq a\,. \\ 0 & \text{für } a < x \end{cases} \tag{4}$$

Wir wollen verallgemeinerte Eigenzustände $\psi(x)$ von $\mathbf{H}$ zur Energie E finden. Dabei soll zunächst $0 < E < V_0$ gelten. Wir machen den allgemeinen Ansatz (vgl. Vorlesung)

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{für } x < 0 \\ Ce^{ik'x} + De^{-ik'x} & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ Ee^{ikx} + Fe^{-ikx} & \text{für } a < x \end{cases} \tag{5}$$

mit $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie k und k' so, daß dieses $\psi(x)$ ein verallgemeinerter Eigenzustand zur Energie E ist. Wir wollen eine „von links einlaufende ebene Welle“ untersuchen. Dazu wählen wir $A = 1$ und $F = 0$. Finden Sie die notwendigen (Anschluß-)Bedingungen für die anderen Koeffizienten $B, \ldots, E$ in Form eines linearen Gleichungssystems. In diesem Gleichungssystem können die Koeffizienten C und D eliminiert werden und man findet

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{(k^2 - k'^2)(1 - e^{2ik'a})}{(k + k')^2 - (k - k')^2 e^{2ik'a}} \qquad (6)\\
E &= \frac{4kk' e^{i(k'-k)a}}{(k + k')^2 - (k - k')^2 e^{2ik'a}} \, . \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Bestimmen Sie hieraus den Reflexionskoeffizienten K_R und den Transmissionskoeffizienten K_T, d. h. die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß ein Teilchen am Potential reflektiert wird bzw. durch das Potential tunnelt. Zeigen Sie $K_R + K_T = 1$.
Die obigen Resultate gelten auch, wenn $E \geq V_0$ gilt. Skizzieren Sie den Transmissionskoeffizienten als Funktion von E/V_0 im Bereich $0 \leq E/V_0 \leq 4$, zum Beispiel für $mV_0a^2/\hbar^2 = 8$. Wie groß ist der Transmissionskoeffizient im Fall $E \to V_0$? Bei welchen Energiewerten ist die Barriere vollständig durchlässig?

H 18 Ehrenfest–Theorem (5 Punkte)

Sei $\psi_t(x) = \psi(\vec{x}, t)$ eine Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung im Ortsraum. Der Hamiltonoperator sei gegeben durch

$$
\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x}) \, , \qquad (8)
$$

und ψ sei normiert, $\langle \psi_t \,|\, \psi_t \rangle = 1$. Wir bezeichnen die Erwartungswerte von Orts– und Impulsoperator im Zustand $\psi(\vec{x}, t)$ mit

$$
\begin{aligned}
\vec{X}(t) &= \langle \psi_t \,|\, \mathbf{Q}\psi_t \rangle = \langle \mathbf{Q} \rangle (t) \qquad (9)\\
\vec{P}(t) &= \langle \psi_t \,|\, \mathbf{P}\psi_t \rangle = \langle \mathbf{P} \rangle (t) \, . \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie, daß diese Erwartungswerte die folgenden Bewegungsgleichungen (die Ehrenfestschen Gleichungen) erfüllen:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\vec{X}(t) &= \frac{1}{m}\vec{P}(t) \, , \qquad (11)\\
\frac{d}{dt}\vec{P}(t) &= -\left\langle \psi_t \,\middle|\, \left(\vec{\nabla} V(\vec{x})\right) \psi_t \right\rangle \, . \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Hinweis:
Betrachten Sie zunächst allgemein $\frac{d}{dt} \langle \mathbf{A} \rangle$ für einen selbstadjungierten und im allgemeinen zeitabhängigen Operator $\mathbf{A}$. Zeigen Sie dann zum Beweis von Gl. (11) zunächst $\left[\mathbf{C}, \mathbf{D}^2\right] = \mathbf{D}\,[\mathbf{C}, \mathbf{D}] + [\mathbf{C}, \mathbf{D}]\,\mathbf{D}$ für zwei Operatoren $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$.

H 19 Gaußsches Wellenpaket II (5 Punkte)

Diese Aufgabe kann auch noch am 6. Juni abgegeben werden.

Ein eindimensionales Gaußsches Wellenpaket habe zum Zeitpunkt $t = 0$ die Form

$$\psi(x, t = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \, e^{ikx} \, \phi(k) \, , \tag{13}$$

wobei mit $a, k_0 \in \mathbb{R}$

$$\phi(k) = \left(\frac{2a^2}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-a^2(k-k_0)^2} \, . \tag{14}$$

Zeigen Sie, daß

$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi a^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2} + ik_0 x \right) \, . \tag{15}$$

Die Zeitentwicklung des Wellenpakets ist gegeben durch

$$\psi(x, t) = \exp\left(-\frac{i\mathbf{H}t}{\hbar} \right) \psi(x, t = 0) \, , \tag{16}$$

worin $\mathbf{H}$ der Hamiltonoperator für die freie Bewegung eines Teilchens der Masse m ist.

(a) *(optional)* (+2 Punkte)
Zeigen Sie, daß sich hieraus

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi a^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + i\frac{t}{\tau}}} \exp\left(\frac{-\frac{x^2}{4a^2} + ik_0 x - ia^2 k_0^2 \frac{t}{\tau}}{1 + i\frac{t}{\tau}} \right) \tag{17}$$

mit $\tau = 2ma^2/\hbar$ ergibt.

(b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x, t)$ an und berechnen Sie die zeitliche Entwicklung der Erwartungswerte des Orts– und des Impulsoperators. (Das Resultat aus Teil (a) kann hierzu verwendet werden.) Vergleichen Sie das Resultat mit den Ehrenfestschen Gleichungen aus Aufgabe H 18. Bestimmen Sie auch die zeitliche Entwicklung des Schwankungsprodukts $(\Delta\mathbf{Q})(\Delta\mathbf{P})$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem minimal möglichen Wert, der sich aus der Unschärferelation ergibt (siehe Aufgabe H 5).

Hinweis: Es bietet sich an, die Abkürzung $\tilde{a}^2 = a^2(1 + t^2/\tau^2)$ zu verwenden.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qmueb01.html
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~dosch/qm01.html