
4. ÜBUNG ZUR QUANTENMECHANIK

Besprechung der Präsenzaufgaben: **Fr., 8.5.2015**
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: **Di., 12.5.2015**

P 12 Spinalgebra und Dichteoperator

(+ 5 Punkte)

Die Komponenten des Spinoperators eines Zwei-Zustand-Systems sind definiert als $\mathbf{S}_i = \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}_i$, wobei $\boldsymbol{\sigma}_i$ die Pauli-Matrizen sind. Der Dichteoperator für ein solches System ist

$$\rho = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1} + \sum_{i=1}^3 P_i \boldsymbol{\sigma}_i. \quad (1)$$

Zeigen Sie:

- (a) $\det \boldsymbol{\sigma}_j = -1$ und $\text{tr} \boldsymbol{\sigma}_i = 0$,
- (b) $\boldsymbol{\sigma}_i^2 = \mathbf{1}$, $\{\boldsymbol{\sigma}_k, \boldsymbol{\sigma}_l\} = 2\delta_{kl}$ und $[\boldsymbol{\sigma}_k, \boldsymbol{\sigma}_l] = 2i\varepsilon_{klm}\boldsymbol{\sigma}_m$,
- (c) $\boldsymbol{\sigma}_k \boldsymbol{\sigma}_l = \delta_{kl} + i\varepsilon_{klm}\boldsymbol{\sigma}_m$, und damit $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$,
- (d) $\langle \mathbf{S}_i \rangle = \text{tr}(\rho \mathbf{S}_i) = \hbar P_i$.

S 13 Spinalgebra im Produktraum

(6 Punkte)

Wir betrachten ein System aus 2 Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen. Der Zustandsraum dieses Systems ist der Produktraum der Hilberträume der einzelnen Teilchen, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$. Der Operator des Gesamtspins ist $\boldsymbol{\Sigma}$, seine Komponenten sind

$$\boldsymbol{\Sigma}_i = \mathbf{S}_i \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{S}_i. \quad (2)$$

Wir bezeichnen die beiden Zustände eines Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchens mit $|+\rangle$ und $|-\rangle$, wobei $\boldsymbol{\sigma}_3 |+\rangle = |+\rangle$ und $\boldsymbol{\sigma}_3 |-\rangle = -|-\rangle$. Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{\Sigma}^2 = \mathbf{S}^2 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{S}^2 + 2 \sum_{i=1}^3 \mathbf{S}_i \otimes \mathbf{S}_i. \quad (3)$$

Berechnen Sie die Wirkung der Operatoren $\boldsymbol{\Sigma}_3$ und $\boldsymbol{\Sigma}^2$ auf folgende Zustände:

- (a) $|+\rangle \otimes |+\rangle$,
- (b) $|-\rangle \otimes |-\rangle$,
- (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle + |-\rangle \otimes |+\rangle)$,
- (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \otimes |-\rangle - |-\rangle \otimes |+\rangle)$.

S 14 Translationsoperator

(7 Punkte)

(a) Im abstrakten Hilbertraum

Der Translationsoperator ist für $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ definiert als

$$\mathbf{T}_{\mathbf{a}} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathbf{a} \cdot \mathbf{P}\right), \quad (4)$$

wobei \mathbf{P} der Impulsoperator ist. Zeigen Sie, dass $\mathbf{T}_{\mathbf{a}}$ unitär ist und dass

$$\mathbf{T}_{\mathbf{a}} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}a_1\mathbf{P}_1\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}a_2\mathbf{P}_2\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}a_3\mathbf{P}_3\right). \quad (5)$$

Zeigen Sie außerdem, dass $\mathbf{T}_{\mathbf{a}}$ die Darstellungseigenschaft besitzt, d. h. dass für $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{T}_{\mathbf{a}}\mathbf{T}_{\mathbf{b}} = \mathbf{T}_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}. \quad (6)$$

(b) Im Ortsraum

Im Ortsraum sind die Komponenten des Impulsoperators $\mathbf{P}_j = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}$. Sei $\psi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)$ unendlich oft differenzierbar. Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{T}_{\mathbf{a}}\psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x} - \mathbf{a}). \quad (7)$$

S 15 Kontinuitätsgleichung

(7 Punkte)

Wir betrachten die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \mathbf{H}|\psi\rangle \quad (8)$$

im Ortsraum. Der Hamiltonoperator sei gegeben durch

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{x}), \quad (9)$$

wobei wir annehmen, dass das Potential V reellwertig ist. Das Betragsquadrat der Wellenfunktion $\rho(\mathbf{x}, t) = |\psi(\mathbf{x}, t)|^2$ kann als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden. Es sei

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*). \quad (10)$$

Zeigen Sie durch Kombination der Schrödingergleichung mit ihrer komplex konjugierten, dass ρ und \mathbf{J} die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} \quad (11)$$

erfüllen. Welche Interpretation hat demzufolge \mathbf{J} ? Zeigen Sie weiter, dass die Gesamtwahrscheinlichkeit $\int_{\mathbb{R}^3}\rho(\mathbf{x}, t)d^3x$ zeitlich konstant ist.

Weitere Informationen unter:

<http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qm15.html>