

---

### 3. ÜBUNG ZUR QUANTENMECHANIK

---

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: **Di., 5.5.2015**

#### S 8 Operatoren im Hilbertraum II

(4 Punkte)

- (a) Ein Operator  $\mathbf{A}$  auf einem Hilbertraum heißt normal, wenn  $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}$ . Sind hermitesche Operatoren normal? Sind unitäre Operatoren normal?
- (b) Seien  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  zwei selbstadjungierte Operatoren mit  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = 0$ . Sei weiter ein vollständiges System von Eigenzuständen von  $\mathbf{A}$  gegeben durch  $|\psi_n\rangle$ , die zugehörigen Eigenwerte seien  $a_n$ . Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass das Spektrum von  $\mathbf{A}$  nicht entartet ist, d. h.  $a_n \neq a_m$  für  $n \neq m$ . Betrachten Sie die Matrixelemente von  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  und schließen Sie, dass  $\mathbf{B}$  diagonal in der Basis  $|\psi_n\rangle$  ist. Zeigen Sie, dass die  $|\psi_n\rangle$  auch Eigenzustände von  $\mathbf{B}$  sind.

*Hinweis:* Ergänzen Sie im Ausdruck  $\mathbf{B}|\psi_l\rangle$  zwei vollständige Systeme.

#### S 9 Kommutatoralgebra

(optional, + 7 Punkte)

Wir betrachten Operatoren auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ .

- (a) Zeigen Sie  $[\mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{C}] = \mathbf{A}[\mathbf{B}, \mathbf{C}] + [\mathbf{A}, \mathbf{C}]\mathbf{B}$  und  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}\mathbf{C}] = \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}] + [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C}$ .

Im Folgenden wollen wir annehmen, dass die Operatoren  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  jeweils mit ihrem Kommutator vertauschen, d. h.  $[[\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{A}] = 0$  und  $[[\mathbf{A}, \mathbf{B}], \mathbf{B}] = 0$ .

- (b) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}^n] = n\mathbf{B}^{n-1}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \quad \text{und} \quad [\mathbf{A}^n, \mathbf{B}] = n\mathbf{A}^{n-1}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]. \quad (1)$$

- (c) Wir definieren die Funktion  $F(\lambda)$  der Operatoren  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  durch

$$F(\lambda) = e^{\lambda\mathbf{A}} e^{\lambda\mathbf{B}} e^{-\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})}. \quad (2)$$

Zeigen Sie, dass  $\frac{d}{d\lambda}F(\lambda) = \lambda[\mathbf{A}, \mathbf{B}]F(\lambda)$  ist. Folgern Sie durch Integration dieser Differentialgleichung, dass

$$e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}+\frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]} \quad \text{und} \quad e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}} e^{\mathbf{A}} e^{[\mathbf{A}, \mathbf{B}]}. \quad (3)$$

*Bemerkung:*

Die letzteren Formeln, Gl. (3), sind Spezialfälle der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel, wonach für zwei allgemeine Operatoren  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$  gilt

$$e^{\mathbf{C}} e^{\mathbf{D}} = e^{\mathbf{C}+\mathbf{D}+Z(\mathbf{C}, \mathbf{D})} \quad (4)$$

mit  $Z(\mathbf{C}, \mathbf{D}) = \frac{1}{2}[\mathbf{C}, \mathbf{D}] + \frac{1}{12}[\mathbf{C}, [\mathbf{C}, \mathbf{D}]] - \frac{1}{12}[\mathbf{D}, [\mathbf{C}, \mathbf{D}]] + \dots$ , worin die weiteren Terme höhere Kommutatoren enthalten. Insbesondere ist also im Allgemeinen  $e^{\mathbf{C}} e^{\mathbf{D}} \neq e^{\mathbf{C}+\mathbf{D}}$ .

Der oben betrachtete Fall, dass zwei Operatoren jeweils mit ihrem Kommutator vertauschen, tritt in der Quantenmechanik oft auf, etwa wenn der Kommutator eine komplexe Zahl ist – wie z. B. beim Kommutator von Orts- und Impulsoperator.

## S 10 Projektionsoperatoren

(6 Punkte)

Es sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und darin  $\{|\psi_i\rangle\}_{i \in \mathbb{N}}$  ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren einer Observablen  $\mathbf{A}$  mit nicht-entarteten Eigenwerten  $a_i$ . Jeder beliebige Zustand besitzt also eine eindeutige Darstellung der Form  $|\psi\rangle = \sum_i c_i |\psi_i\rangle$ .

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{1} = \sum_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad \text{und} \quad \mathbf{A} = \sum_i a_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (5)$$

indem Sie die Wirkung dieser Operatoren auf einen beliebigen Zustand  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  untersuchen.

Ein Operator  $\mathbf{P}$  heißt Projektionsoperator, wenn  $\mathbf{P}^\dagger = \mathbf{P}$  und  $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ .

(b) Zeigen Sie, dass die Operatoren

$$\mathbf{P}_i(\mathbf{A}) = \prod_{j \neq i} \frac{\mathbf{A} - a_j}{a_i - a_j} \quad (6)$$

Projektionsoperatoren sind.

(c) Zeigen Sie, dass die Operatoren  $\mathbf{P}_i(\mathbf{A})$  die folgenden Eigenschaften besitzen:

$$\mathbf{P}_i(\mathbf{A})\mathbf{P}_j(\mathbf{A}) = \delta_{ij}\mathbf{P}_j(\mathbf{A}) \quad \text{und} \quad \sum_i \mathbf{P}_i(\mathbf{A}) = \mathbf{1}. \quad (7)$$

(d) Zeigen Sie, dass auch  $\mathbf{P}_i(\mathbf{A}) = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$  eine mögliche Darstellung der obigen Projektionsoperatoren ist.

## S 11 Zwei-Zustand-System

(10 Punkte)

Wir betrachten ein System mit einem diskreten Freiheitsgrad, d. h. die möglichen Zustände können durch Zustandsvektoren in  $\mathbb{C}^2$  beschrieben werden. Eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{C}^2$  ist gegeben durch

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Das System sei beschrieben durch  $|\psi\rangle = a|u\rangle + b|d\rangle$  mit  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Die Dynamik des Systems sei durch den Hamilton-Operator

$$\mathbf{H} = -\frac{\mu B}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i\sqrt{3} \\ i\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = -\mu B \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \boldsymbol{\sigma}_2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_3 \right] \quad (9)$$

gegeben, worin  $\boldsymbol{\sigma}_i$  die Pauli-Matrizen sind:

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

(a) Berechnen Sie den Kommutator  $[\mathbf{H}, \boldsymbol{\sigma}_1]$ .

(b) Bestimmen Sie jeweils die Eigenwerte und Eigenzustände von  $\mathbf{H}$  und  $\boldsymbol{\sigma}_1$ .

(c) Geben Sie die Zeitentwicklung der Eigenzustände des Hamilton-Operators an.

(d) Zur Zeit  $t = 0$  befinde sich das System im Eigenzustand zum positiven Eigenwert von  $\boldsymbol{\sigma}_1$ . In welchem Zustand ist das System zum Zeitpunkt  $t = T > 0$ , und welchen Erwartungswert hat dann  $\boldsymbol{\sigma}_1$ ?

Weitere Informationen unter:

<http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qm15.html>