Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, T. K. Herbst Universität Heidelberg
Sommersemester 2015

1. Übung zur Quantenmechanik

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: **Di., 21.4.2015**

Schriftlich zu bearbeitende Aufgaben sind mit einem S gekennzeichnet, Präsenzaufgaben mit einem P. Die Präsenzaufgaben sollen **vor** den Übungen gelöst werden. Die Punkte für diese Aufgaben gibt es für die Bereitschaft zum Vorrechnen. Es empfiehlt sich, dann auch eine Lösung parat zu haben. (Sonst werden die Punkte wieder abgezogen.)

S 1 Lineare Algebra in endlicher Dimension (6 Punkte)

Sei $V = \mathbb{C}^n$ ein komplexer Vektorraum und sei $\langle \cdot \,|\cdot \rangle$ ein Skalarprodukt, d. h. für $f, g, h \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

$$\langle f\,|g\rangle = \langle g\,|f\rangle^* \ , \tag{1}$$

$$\langle f\,|\alpha g + \beta h\rangle = \alpha \langle f\,|g\rangle + \beta \langle f\,|h\rangle \ , \tag{2}$$

$$\langle f\,|f\rangle \geq 0\,, \text{ und } \langle f\,|f\rangle = 0 \text{ nur wenn } f = 0\,. \tag{3}$$

Sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Orthonormalbasis von V.

(a) Was ist $\langle e_i\,|e_j\rangle$? Wie wird $|e_i\rangle\,\langle e_i|$ sinnvoll definiert? Was ist $(|e_i\rangle\,\langle e_i|)^2$ und welche Bedeutung hat demzufolge $|e_i\rangle\,\langle e_i|$?

(b) Zeigen Sie: Die Entwicklungskoeffizienten eines beliebigen Vektors $x \in V$, $x = \sum_{i=1}^n c_i e_i$, sind gegeben durch $c_i = \langle e_i\,|x\rangle$ und es gilt $\langle x\,|x\rangle = \sum_{i=1}^n c_i^* c_i$. Außerdem gilt die Vollständigkeitsrelation $\sum_{i=1}^n |e_i\rangle\,\langle e_i| = \mathbf{1}$.

Sei nun $\mathbf{A} : V \to V$ eine lineare Abbildung. Die Exponentialabbildung einer Matrix kann mit Hilfe der Reihendarstellung definiert werden:

$$\exp(\mathbf{A}) = \mathbf{1} + \mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 + \ldots\,. \tag{4}$$

(c) Zeigen Sie: Hat $\mathbf{A}$ bezüglich $\{e_1, \ldots, e_n\}$ die Matrix (a_{ik}), so hat die hermitesch adjungierte Abbildung $\mathbf{A}^\dagger$ die Matrixelemente $(\mathbf{A}^\dagger)_{ik} = a_{ki}^*$.

(d) Berechnen Sie $\exp(B\boldsymbol{\sigma}_z)$ mit $\boldsymbol{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $B \in \mathbb{R}$.

S 2 Lineare Algebra im Hilbertraum (7 Punkte)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.

(a) Sei eine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathcal{H}$ gegeben. Gewinnen Sie hieraus durch Polarisieren das zugeordnete Skalarprodukt $\langle \cdot\,|\cdot\rangle$, für welches gilt $\|f\|^2 = \langle f\,|f\rangle$.

Hinweis: Betrachten Sie $\|f+g\|^2, \|f-g\|^2, \|f+ig\|^2, \|f-ig\|^2$ und konstruieren Sie daraus $\langle f\,|g\rangle$.

Sei nun $\langle\cdot|\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt, d. h. es gelten (1)-(3) aus Aufgabe 1.

(b) Zeigen Sie, dass für $f, g, h \in \mathcal{H}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

$$\langle \alpha f + \beta g \,|h\rangle = \alpha^* \langle f \,|h\rangle + \beta^* \langle g \,|h\rangle \tag{5}$$

Die Exponentialabbildung eines linearen Operators auf einem allgemeinen Hilbertraum kann wie in endlicher Dimension (siehe (4) in Aufg. 1) mit Hilfe der Reihendarstellung definiert werden.

(c) Zeigen Sie: Ist $\mathbf{A}$ selbstadjungiert, so ist $\exp(i\mathbf{A})$ unitär.

S 3 Fourier-Transformation (7 Punkte)

Wir betrachten (i. a. komplexwertige) Funktionen f einer reellen Variablen, von denen wir annehmen, dass sie absolut integrierbar (d. h. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$) und stetig differenzierbar sind.
Die Fourier-Transformation einer solchen Funktion $f(x)$ ist gegeben durch

$$\tilde{f}(k) = \mathcal{F}[f(x); k] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-ikx} f(x)\,. \tag{6}$$

Die inverse Transformation ist dann

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ikx} \tilde{f}(k)\,. \tag{7}$$

Seien f, g zwei Funktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Fourier-Transformation:

$$\mathcal{F}[\alpha f(x) + \beta g(x); k] = \alpha\, \mathcal{F}[f(x); k] + \beta\, \mathcal{F}[g(x); k]\,, \tag{8a}$$

$$\mathcal{F}[f(x-a); k] = e^{-ika}\, \mathcal{F}[f(x); k]\,, \tag{8b}$$

$$\mathcal{F}[f(ax); k] = \frac{1}{a}\, \mathcal{F}\left[f(x); \frac{k}{a}\right], \quad \text{mit } a > 0\,, \tag{8c}$$

$$\mathcal{F}[f(-x); k] = \mathcal{F}[f(x); -k]\,, \tag{8d}$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dx} f(x); k\right] = ik\, \mathcal{F}[f(x); k]\,, \tag{8e}$$

$$\mathcal{F}[x f(x); k] = i \frac{d}{dk}\, \mathcal{F}[f(x); k]\,. \tag{8f}$$

Bemerkung: Man kann die Fourier-Transformation in natürlicher Weise auf Funktionen auf $\mathbb{R}^3$ erweitern. Dann gelten zu (8a)–(8f) analoge Relationen. Man beachte allerdings, dass in diesem Fall in (8c) der Skalierungsfaktor nun $1/a^3$ ist und dass die Gleichungen (8e) und (8f) komponentenweise formuliert werden müssen.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qm15.html