Institut für Theoretische Physik — Universität Heidelberg
C. Ewerz, A. Samberg — Wintersemester 2013/14

6. Übung zur Elektrodynamik

Besprechung der Präsenzaufgaben: 25.–27.11.2013
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 28.11.2013

S 27 Dipol- und Quadrupolmoment eines Ellipsoids (6 Punkte)

Ein Ellipsoid mit Halbachsen $a, b, c > 0$ sei homogen geladen, die Gesamtladung sei Q.

(a) Berechnen Sie das elektrostatische Potential des Ellipsoids für große Abstände einschließlich des Quadrupolbeitrags.

(b) Geben Sie das Ergebnis für ein axialsymmetrisches Ellipsoid mit $a = b \neq c$ an.

(c) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus (a) für den bekannten Spezialfall der Kugel, $a = b = c$.

Hinweis: Beachten Sie bei der Berechnung des Quadrupoltensors die Symmetrie der Ladungsverteilung. Schreiben Sie x/a, y/b und z/c in sphärischen Polarkoordinaten.

S 28 Arbeit im elektrischen Feld, Ladung und Dipol im Quadrupolfeld (4 Punkte)

Wir betrachten die Bewegung einer Ladung im elektromagnetischen Feld. Die im Zeitelement dt vom Feld an der Ladung geleistete Arbeit dW ist durch die Lorentz-Kraft $\boldsymbol{F}$ bestimmt,

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}\, dt\,, \tag{1}$$

wobei $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{x}/dt$.

(a) Bestimmen Sie diese Arbeit und damit die Leistung für eine Punktladung. Welche Arbeit leistet dabei das magnetische Feld?

(b) Bestimmen Sie in analoger Weise die Leistung für eine Ladungsverteilung ρ aus der Kraftdichte der Lorentz-Kraft.

Im Ursprung befinde sich nun ein elektrischer Quadrupol, dessen kartesischer Quadrupoltensor nur drei nichtverschwindende Komponenten habe: $q_{11} = q_{22} = -2\zeta$, $q_{33} = 4\zeta$, wobei ζ eine Konstante von Dimension $[\zeta] = (\text{Ladung})(\text{Länge})^2$ sei (vergleiche Aufg. 24).

(c) Berechnen Sie die Arbeit, die man leistet, wenn man eine elektrische Ladung Q vom Punkt $(0, 0, \infty)$ zum Punkt $(0, 0, a)$ bringt.

(d) Welche Arbeit leistet man, wenn man einen elektrischen Dipol mit Dipolmoment $\boldsymbol{p} = p\,\boldsymbol{e}_3$ auf demselben Weg transportiert?

Hinweis: Das statische elektrische Feld des Quadrupols ist konservativ.

S 29 Separationsansatz für die Laplace-Gleichung (5 Punkte)

Wir betrachten die Laplace-Gleichung $\Delta\phi = 0$ in sphärischen Koordinaten r, θ, φ. Zeigen Sie, dass der Separationsansatz

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \frac{u(r)}{r} P(\theta) Q(\varphi) \tag{2}$$

bei geeigneter Wahl der Separationskonstanten auf die drei Gleichungen

$$\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} = -m^2 \tag{3}$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u = 0 \tag{4}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] P = 0 \tag{5}$$

führt. Geben Sie die Lösung der ersten Gleichung an und zeigen Sie deren 2π-Periodizität. Leiten Sie mit einem Potenzansatz die allgemeine Lösung der zweiten Gleichung her. Zeigen Sie, dass die dritte Gleichung für den Fall $m = 0$ und bei Wahl einer geeigneten Variablen x auf die Legendresche Differentialgleichung führt.

S 30 Vektorpotential paralleler Ströme (5 + 3 Punkte)

Zwei geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbarem Querschnitt seien im Abstand $2a$ parallel zueinander (z. B. in 3-Richtung) gespannt. Beide Drähte seien von stationären Strömen der Stärke I durchflossen. Berechnen Sie das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ für den Fall, dass die Ströme in den Drähten

(a) in entgegengesetzter Richtung fließen,

(b) in gleicher Richtung fließen.

Hinweis: Beachten Sie einen früheren Hinweis. Es gilt

$$\int \frac{dz}{\sqrt{r^2+z^2}} = \ln\left(\frac{z+\sqrt{z^2+r^2}}{r}\right). \tag{6}$$

(c) (optional, +3 Punkte)
Welche geometrische Form haben für den in (a) betrachteten Fall die Äquipotentiallinien mit konstantem $|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})|$?

P 31 Gruppeneigenschaft der Eichtransformationen (+4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Eichtransformationen der elektromagnetischen Potentiale (mit einer beliebigen Funktion $\chi(\boldsymbol{x}, t)$)

$$\varphi \to \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \operatorname{grad} \chi \tag{8}$$

bezüglich der Hintereinanderausführung eine kommutative Gruppe bilden.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/ed13.html