Institut für Theoretische Physik
C. Ewerz, A. Samberg

Universität Heidelberg
Wintersemester 2013/14

4. Übung zur Elektrodynamik

Besprechung der Präsenzaufgaben: 11.–13.11.2013
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 14.11.2013

S 15 Lebensdauer von Ladungsverteilungen im Inneren von Leitern

(3 Punkte)

Das Ohmsche Gesetz $I = U/R$ kann für isotrope, homogene Leiter in der differentiellen Form

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t) = \sigma \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) \tag{1}$$

geschrieben werden, worin σ eine positive Materialkonstante ist, die sog. *spezifische Leitfähigkeit.*

(a) Zeigen Sie, dass in einem solchen Leiter die Ladungsdichte $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 4\pi\sigma\rho = 0 \tag{2}$$

genügt.

(b) Zeigen Sie durch Lösen dieser Gleichung, dass sich im Inneren des Leiters keine stationäre Ladungsverteilung ausbilden kann. Bestimmen Sie die typische Zeitspanne τ, nach der eine anfänglich vorhandene Ladungsverteilung abgeklungen ist. Wie groß ist τ für Kupfer?
Hinweis: Die spezifische Leitfähigkeit von Kupfer beträgt in Gaußschen Einheiten $\sigma_{\mathrm{Cu}} = 5.4 \cdot 10^{17}\,\mathrm{sec}^{-1}$. (In SI-Einheiten entspricht dies $0.6 \cdot 10^{8}\,\mathrm{S\,m}$, wobei $1\,\mathrm{S} = 1\,\mathrm{Siemens} = 1\,\Omega^{-1}$.)

S 16 Geladener Draht

(4 Punkte)

Bestimmen Sie das Potential und das elektrische Feld eines unendlich langen, leitenden Drahtes mit konstanter Ladungsdichte σ. Der Draht sei dabei gerade (z. B. entlang der z-Achse) und unendlich dünn.
Hinweis: Sie können den Gaußschen Satz und geeignete Methoden benutzen, um das elektrische Feld und daraus das Potential zu berechnen. Alternativ können Sie die allgemeine Lösung der Poisson-Gleichung für das Potential verwenden. Nehmen Sie in diesem Fall zunächst an, dass der Draht eine endliche Länge l hat. Benutzen Sie dann, bevor Sie den Grenzwert $l \to \infty$ nehmen, die Eichfreiheit, um geeignete Konstanten zum Potential zu addieren. Es gilt

$$\int \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \ln\left(z + \sqrt{r^2 + z^2}\right) . \tag{3}$$

S 17 Greensches Reziprozitätstheorem (optional, +3 Punkte)

Es sei φ das von einer Ladungsverteilung ρ verursachte Potential, und φ' das von einer Ladungsverteilung ρ' verursachte Potential. Beweisen Sie das Greensche Reziprozitätstheorem

$$\int \rho(\boldsymbol{x})\varphi'(\boldsymbol{x})\, d^3x = \int \rho'(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\, d^3x\,. \tag{4}$$

Bemerkung: Für den Fall, dass das Volumen, in dem sich obige Ladungsverteilungen befinden, durch leitende Oberflächen berandet ist, lautet das Theorem

$$\int_V \rho\varphi'\, d^3x + \int_{\partial V} \sigma\varphi'\, df = \int_V \rho'\varphi\, d^3x + \int_{\partial V} \sigma'\varphi\, df\,, \tag{5}$$

wobei σ bzw. σ' die jeweiligen Flächenladungsdichten auf den Leiteroberflächen sind.

S 18 Ladung vor leitender Kugel (8 Punkte)

Wir betrachten eine leitende Kugel mit Radius R. Vor der Kugel befinde sich im Abstand $a > R$ vom Kugelmittelpunkt eine punktförmige Ladung q.

(a) Die Kugel sei geerdet.

- (i) Bestimmen Sie die Greensche Funktion für diese Situation.
- (ii) Berechnen Sie das Potential φ und das elektrische Feld $\boldsymbol{E}$ außerhalb der Kugel. Wie groß ist das Feld innerhalb der Kugel?
- (iii) Berechnen Sie die influenzierte Flächenladungsdichte σ auf der Kugel. Wie groß ist die Gesamtladung der Kugel?

(b) Die Kugel sei jetzt isoliert und trage eine Ladung Q. Geben Sie auch für diesen Fall das Potential und das elektrische Feld außerhalb der Kugel an.
Hinweis: Das Ergebnis von Teil (a) kann hier hilfreich sein.

P 19 Polare und axiale Vektorfelder (+5 Punkte)

Wir betrachten das Verhalten von verschiedenen Größen unter orthogonalen Transformationen, die wir durch Matrizen $A \in O(3)$ darstellen, mit $(A)_{ij} = a_{ij}$. Es seien $\lambda(\boldsymbol{x})$ ein skalares Feld und $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ ein Vektorfeld.

(a) Zeigen Sie:

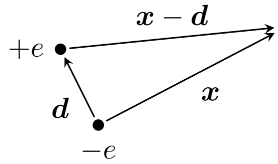
- (i) $\nabla\lambda(\boldsymbol{x})$ ist ein polares Vektorfeld.
- (ii) $\nabla \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ ist ein skalares Feld.
- (iii) $\nabla \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ ist ein axiales Vektorfeld.
  Hinweis: Schreiben Sie die Rotation mit Hilfe des ϵ_{ijk}-Tensors. Diese Relation gilt vor und nach der Transformation. Beachten Sie außerdem, dass für orthogonale Transformationen $\det A = \pm 1$, d. h. $(\det A)^2 = 1$, und $\epsilon'_{ijk} = a_{il}a_{jm}a_{kn}\epsilon_{lmn} = (\det A)\epsilon_{ijk}$.

(b) Zeigen Sie, dass das elektrische Feld $\boldsymbol{E}$ ein polarer Vektor ist, während die magnetische Induktion $\boldsymbol{B}$ ein axialer Vektor ist.
Hinweis: Eine Möglichkeit, dies zu zeigen, ist durch Inspektion der Lorentzkraft.

S 20 Elektrischer Dipol und Quadrupol (5 + 2 Punkte)

Wir wollen in dieser Aufgabe die in der Vorlesung allgemein durchgeführte Multipolentwicklung konkret für einen elektrischen Dipol und einen elektrischen Quadrupol durchführen.

(a) Betrachten Sie einen elektrischen Dipol aus zwei Ladungen: $-e$ im Ursprung und $+e$ bei $\boldsymbol{d}$, siehe Skizze.



Das Potential ist offensichtlich durch

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = e\left(-\frac{1}{|\boldsymbol{x}|} + \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}|}\right) \tag{6}$$

gegeben. Wir wollen eine Taylor-Entwicklung für $|\boldsymbol{d}| \ll |\boldsymbol{x}| = r$ durchführen.

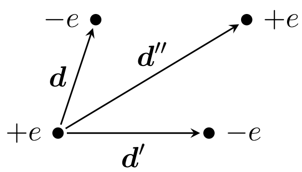
(i) Nutzen Sie die mehrdimensionale Taylor-Formel, um φ für kleine $\boldsymbol{d}$ zu entwickeln. Zeigen Sie, dass das Monopolmoment verschwindet und dass die führende Multipolordnung das Potential des Dipols ist,

$$\varphi_{(1)}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}{r^3}\,, \tag{7}$$

worin $\boldsymbol{p} = e\boldsymbol{d}$ das *elektrische Dipolmoment* ist. Berechnen Sie auch das resultierende Dipolfeld $\boldsymbol{E}_{(1)}(\boldsymbol{x})$. Wie fallen $\varphi_{(1)}(\boldsymbol{x})$ und $\boldsymbol{E}_{(1)}(\boldsymbol{x})$ für große r ab?

(ii) (optional, +2 Punkte)
Nun seien die Koordinaten so gewählt, dass $\boldsymbol{p} = p\boldsymbol{e_z}$. Drücken Sie die (kartesischen) Komponenten von $\boldsymbol{E}_{(1)}$ in Kugelkoordinaten (r, φ, θ) aus.

(b) Betrachten Sie einen elektrischen Quadrupol mit vier betragsgleichen Ladungen, die als Parallelogramm angeordnet sind, siehe Skizze.



Es gilt $\boldsymbol{d}'' = \boldsymbol{d} + \boldsymbol{d}'$. Der Ursprung liege im unteren linken Punkt. Das Potential ist

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = e\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}|} - \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}'|} + \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{d}''|}\right). \tag{8}$$

(i) Zeigen Sie, dass in der Taylor-Entwicklung in $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{d}'$ und $\boldsymbol{d}''$ Monopol- und Dipolordnung verschwinden. Führen Sie den symmetrischen Tensor $\hat{q}_{kl} = 3e(d_k d'_l + d'_k d_l)$ als Hilfsgröße ein und zeigen Sie, dass die führende Multipolordnung gegeben ist durch

$$\varphi_{(2)}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{6}\sum_{k,l=1}^{3} \hat{q}_{kl}\,\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\frac{1}{r}. \tag{9}$$

(ii) Zeigen Sie, dass $\varphi_{(2)}(\boldsymbol{x})$ unverändert bleibt, wenn wir $\hat{q}_{kl}$ durch Addition eines Terms $a\delta_{kl}$, $a \in \mathbb{R}$, modifizieren.
Hinweis: Da wir am „Fernfeld“ $r \gg |\boldsymbol{d}|$ interessiert sind, können Sie $r \neq 0$ annehmen.

(iii) Bestimmen Sie a so, dass $q_{kl} = \hat{q}_{kl} + a\delta_{kl}$ symmetrisch und spurfrei (und damit ein irreduzibler Tensor) ist. Geben Sie q_{kl} und $\varphi_{(2)}(\boldsymbol{x})$ explizit an. Wie fällt $\varphi_{(2)}(\boldsymbol{x})$ für große r ab?

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/ed13.html