

Vorlesungsskript zur Elektrodynamik (PTP 3)

Astrid Eichhorn,*

Wintersemester 2026/27

*Dies ist eine vorläufige Version des Vorlesungsskript. Wenn Sie bemerken, dass sich ein Fehler eingeschlichen hat, schreiben Sie bitte an a.eichhorn@thphys.uni-heidelberg.de.

Contents

0	Hinweise zum Skript	3
1	Einladung zu dieser Vorlesung	4
1.1	Wo ist Elektrodynamik in der Beschreibung der Natur wichtig?	4
1.2	Elektrodynamik als “Blaupause”: Allgemeine Relativitätstheorie, Standardmodell der Teilchenphysik, Statistische Feldtheorie in der Kondensierten Materie, Quantenfeldtheorie als Ursprung aller Struktur im Universum...	5
1.3	Elektrodynamik und aktuelle Forschung	5
2	Elektromagnetische Wellen – Licht aus den Maxwellgleichungen	6
2.1	Maxwell-Gleichungen	6
2.2	Herleitung der Wellengleichung aus den Maxwell-Gleichungen	9
2.3	Lösungen der elektromagnetischen Wellengleichung	12
2.4	Verständnisfragen zu diesem Kapitel	19
3	Spezielle Relativitätstheorie	21
3.1	Motivation: Die Lichtgeschwindigkeit ist eine besondere Geschwindigkeit	21
3.2	Lorentztransformationen	22
3.2.1	Galilei-Transformationen und Eigenschaften von Symmetriegruppen	22
3.2.2	Nicht-Konstanz der Lichtgeschwindigkeit unter Galilei-Boosts	26
3.2.3	Herleitung der Lorentz-Transformation	26
3.2.4	Vierer-Vektoren	31
3.2.5	Rechenregeln für Vierervektoren	36
3.2.6	Lorentz-Gruppe	38
3.3	Verständnisfragen zu diesem Kapitel	40

0 Hinweise zum Skript

Literatur

Zur Elektrodynamik gibt es eine Vielzahl von Büchern und Vorlesungsskripten. Wir werden uns zum Teil orientieren an den folgenden beiden Vorlesungsskripten

- Vorlesungsskript zur Elektrodynamik von Arthur Hebecker (Heidelberg), zu finden [hier](#).
- Vorlesungsskript zur Elektrodynamik (englisch) von David Tong (Cambridge), zu finden [hier](#).

Weitere hilfreiche Literatur ist:

- Lehrbuch von Björn-Malte Schäfer (Heidelberg) [hier](#).
- David J. Griffiths, “Introduction to Electrodynamics”.
- Thorsten Fliessbach, Elektrodynamik, Lehrbuch zur Theoretischen Physik II, Springer.
- Wolfgang Nolting, Elektrodynamik, Band 3 Grundkurs Theoretische Physik

Mini-Übung

Die beste Art, ein neues Thema in der Physik tatsächlich zu verstehen ist, selbst Rechnungen dazu durchzuführen. Deshalb gibt es im Skript “Mini-Übungen”, die nicht mehr als 5-10 Minuten in Anspruch nehmen sollten, und die Ihnen die Möglichkeit geben, sich während der Vorlesung selbstständig mit dem Stoff auseinanderzusetzen, statt nur dem Tafelanschrieb zu folgen.

Verständnisfragen

Jedes Kapitel schließt mit einer Reihe von Verständnisfragen zum Stoff. Wenn Sie diese Fragen selbstständig beantworten können, haben Sie einen guten Überblick über den Stoff.

Ausblick

Vieles, was wir in diesem Semester lernen werden, kommt in Vorlesungen in späteren Semestern wieder. Dies sind einerseits physikalische Einsichten, die wir entwickeln werden, aber auch theoretische Konzepte und auch mathematische Methoden. Manchmal ist die Anwendung z.B. einer konkreten Methode in der Elektrodynamik nicht besonders “spannend” und Sie fragen sich vielleicht, warum Sie Zeit damit verbringen sollte, wenn Sie diese Anwendung gar nicht interessiert. Damit Ihnen nicht entgeht, dass eine konkrete Methode oder auch ein Konzept jenseits der Elektrodynamik wichtige Anwendungen hat, gibt es im Skript Ausblicke auf Anwendungen, die Sie in Zukunft noch sehen werden, und die Sie vielleicht “spannender” finden, als die Anwendung im Elektromagnetismus. Im Allgemeinen können Sie aber davon ausgehen, dass Ihnen alle physikalischen Einsichten, theoretischen Konzepte und mathematischen Methoden aus dieser Vorlesung in zukünftigen Vorlesungen, möglicherweise in abgewandelter Form, noch einmal wiederbegegnen werden.

1 Einladung zu dieser Vorlesung

1.1 Wo ist Elektrodynamik in der Beschreibung der Natur wichtig?

Es gibt in der Natur vier uns bekannte fundamentale Kräfte oder Wechselwirkungen, siehe Fig. 1.

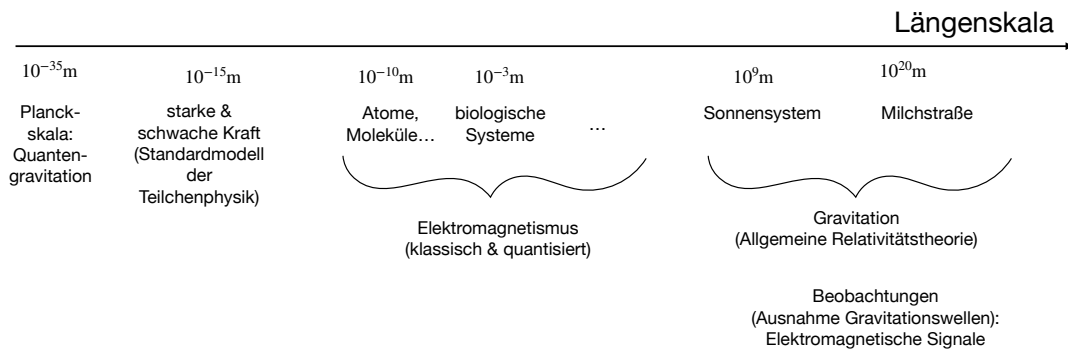


Figure 1: Die vier fundamentalen Kräfte dominieren auf verschiedenen Skalen. Einen großen Bereich dominiert der Elektromagnetismus. Auf einem noch größeren Bereich basieren fast alle Beobachtungen auf elektromagnetischen Signalen.

Auf den allergrößten uns bekannten Skalen – im Sonnensystem, in unserer Galaxie, der Milchstraße und im Universum als Ganzes – dominiert die Gravitation, beschrieben durch die Allgemeine Relativitätstheorie. Am entgegengesetzten Ende, auf den kleinsten uns bekannten Skalen, der Planck-skala, dominiert – so jedenfalls die theoretische Erwartung – auch wieder die Gravitation, aber über ihre Quanteneigenschaften. Auf immer noch winzigen Skalen, die durch Teilchenbeschleuniger experimentell zugänglich sind, und ca. 10^{-18}m bis 10^{-13}m betragen, dominieren die starke und schwache Wechselwirkung. Das sind die Skalen, die durch das Standardmodell der Teilchenphysik beschrieben werden.

Auf allen dazwischenliegenden Skalen (also von der atomaren Skala über molekulare Skalen bis hin zu Skalen der Biologie) ist der Elektromagnetismus die fundamentale Kraft. Auf atomaren Skalen bestimmt der Elektromagnetismus, zusammen mit Eigenschaften der Quantenmechanik, die Wechselwirkungen von Atomen und Molekülen, sowie ihre Struktur. Am Ende der Vorlesung werden wir sehen, wie spektakulär die klassische Elektrodynamik versagt, wenn es um die Erklärung der bloßen Existenz des Wasserstoffatoms geht – geschweige denn seiner Eigenschaften. In der Quantenmechanik kann die elektromagnetische Wechselwirkung aber konsistent erklären, warum es stabile Atome gibt und was ihre Eigenschaften sind. Das Periodensystem der Elemente und damit die Chemie und viele Aspekte der Biologie folgen daraus.¹

Auch wenn auf den größten uns bekannten Skalen die Gravitation die dominierende Wechselwirkung ist, so kommen doch fast alle unsere Informationen über diese Skalen aus elektromagnetischen Signalen. Erst seit 2015 detektieren wir auch Gravitationswellen, und das "nur" für relativ spezielle Systeme, nämlich Binärsysteme sehr kompakter Objekte (Neutronensterne und

¹Dies sollte aber nicht missinterpretiert werden in dem Sinne, dass Chemie und Biologie "triviale" Folgen des Elektromagnetismus sind. Im Gegenteil ist die konsistente Beschreibung von Systemen in der Chemie und Biologie hochgradig nicht-trivial. Hier geht es nur um die Aussage, dass die fundamentale Wechselwirkung, die in all diesen Systemen eine Rolle spielt, der Elektromagnetismus ist.

Schwarze Löcher). Somit wüssten wir ohne die elektromagnetische Wechselwirkung und unser Verständnis dieser Wechselwirkung extrem wenig über das Sonnensystem, die Milchstraße und das Universum als Ganzes.

Damit ist also klar, dass wir in dieser Vorlesung einen sehr zentralen Teil der Beschreibung der Natur erarbeiten werden. Auch wenn es Aspekte geben wird, die schwierig zu verstehen sein werden, so wird uns diese zentrale Bedeutung der Elektrodynamik hoffentlich über diese Herausforderungen hinweg motivieren!

1.2 Elektrodynamik als “Blaupause”: Allgemeine Relativitätstheorie, Standardmodell der Teilchenphysik, Statistische Feldtheorie in der Kondensierten Materie, Quantenfeldtheorie als Ursprung aller Struktur im Universum...

Die Elektrodynamik ist nicht nur wichtig als Theorie einer der vier fundamentalen Wechselwirkungen der Natur. Darüber hinaus ist sie eine Art “Blaupause” für viele andere Theorien. Die Allgemeine Relativitätstheorie und die im Standardmodell der Teilchenphysik enthaltene schwache und starke Wechselwirkung sind jeweils Verallgemeinerungen der Elektrodynamik. Konkret werden Ideen wie die das *Feldes*, das Konzept der *Eichsymmetrie*, sowie die Formulierung einer *relativistischen* Theorie Ihnen in diesen Bereichen wiederbegegnen. Auch in der kondensierten Materie sind Feldtheorien (hier auch oft nicht-relativistisch) von zentraler Bedeutung. Und sogar der Ursprung aller Struktur im Universum wird verstanden durch Eigenschaften einer (Quanten-)feldtheorie. Damit lernen wir in diesem Semester also nicht nur eine wichtige Wechselwirkung genau kennen, sondern wir lernen auch die mathematische Sprache (mit der entsprechenden “Grammatik” und dem zentralen “Vokabular”), um Theorien von fundamentalen Wechselwirkungen zu verstehen (und vielleicht sogar einmal selbst entwickeln) zu können.

1.3 Elektrodynamik und aktuelle Forschung

Warum sollte Sie die Elektrodynamik interessieren? Ist darüber nicht schon lange alles bekannt? Auf viele Fragestellungen trifft das vermutlich zu, aber trotzdem werden wir auch in der Elektrodynamik regelmäßig auf aktuelle Forschungsfragen treffen. Dies ist im Vorlesungsskript gekennzeichnet und kann Ihnen vielleicht als Inspiration dienen.

2 Elektromagnetische Wellen – Licht aus den Maxwellgleichungen

2.1 Maxwell-Gleichungen

In diesem Semester werden wir mehrere Formulierungen der Maxwell-Gleichungen kennenlernen. Physikalisch sind alle diese Formulierungen äquivalent. Jedoch sind sie in unterschiedlichen Variablen formuliert und veranschaulichen, dass die Beziehung der mathematischen Größen in Theorien in der Physik zu den beobachtbaren (messbaren) Größen nicht immer direkt ist. Wir werden also lernen, dass nicht jede mathematische Größe in einer Theorie auch “real existiert”. Diese Unterscheidung wird insbesondere auch jenseits der Elektrodynamik relevant.

Wir starten mit einer Formulierung, in der die mathematischen Größen relativ direkt messbaren Größen entsprechen, nämlich der Formulierung über $\vec{E}$ - und $\vec{B}$ -Felder. In dieser Formulierung wiederholen wir die Maxwell-Gleichungen (die Sie bereits aus der PEP2 Vorlesung kennen) und ihre physikalische Bedeutung.

Wir beginnen mit dem Gauß’schen Gesetz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1)$$

wobei ρ die Ladungsdichte ist und

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \quad (2)$$

ist die Permittivität des Vakuums (oder elektrische Feldkonstante). Hierin ist

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z \quad (3)$$

die Divergenz des Vektorfeldes. Anschaulich gesprochen misst die Divergenz, ob es in einem Vektorfeld Quellen oder Senken gibt.

Wir betrachten zur Veranschaulichung ein zwei-dimensionales Beispiel, nämlich das Vektorfeld $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dies ist konstant und hat deshalb weder Quellen noch Senken. In der Tat ist $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$.

Mini-Übung 1. Betrachten Sie ein weiteres zweidimensionales Beispiel, nämlich $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Skizzieren Sie das Vektorfeld und überlegen Sie, ob es Quellen oder Senken gibt. Berechnen Sie danach $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$. Bestätigt sich Ihre Überlegung?

Lösung. Sie finden die Skizze des Vektorfeldes in Fig. 2.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y = 2.$$

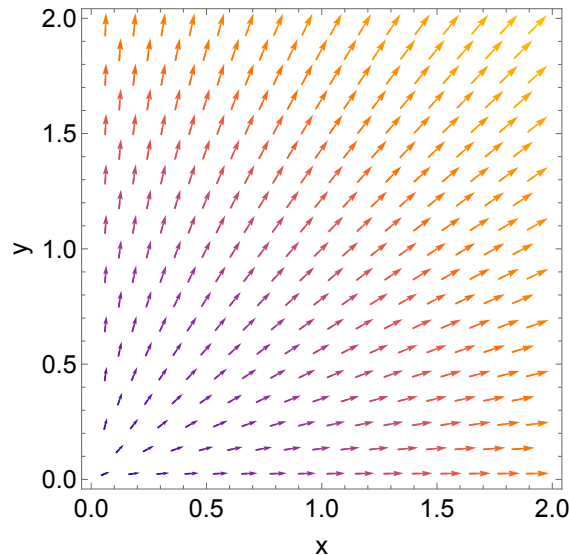


Figure 2: Skizze des Vektorfeldes $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Das Gauß'sche Gesetz in Glg. (1) sagt also aus, dass die Quellen und Senken des elektrischen Feldes die elektrischen Ladungen sind.

Im Gegensatz zum elektrischen hat das magnetische Feld keine Quellen und Senken², d.h., die zweite Maxwell-Gleichung lautet

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (4)$$

Wir sagen, dass das magnetische Feld divergenzfrei ist.

Die ersten beiden Maxwellgleichungen beschreiben, wie sich elektrisches und magnetisches Feld *räumlich* auf Grund von Quellen/Senken ändern. Wir können auf Basis von drei Argumenten sehen, dass diese beiden Gleichungen noch nicht ausreichend sind.

- 1 Was ist mit den zeitlichen Änderungen? Bewegungsgleichungen für physikalische Systeme beschreiben immer auch die zeitlichen Änderungen.
- 2 Und was ist mit räumlichen Änderungen von $\vec{E}$ und $\vec{B}$, die nicht durch die Divergenz beschrieben werden? Als Beispiel nehmen wir $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$. Dieses Vektorfeld ist eindeutig nicht konstant, denn seine Komponenten hängen ja von x und y ab. Seine Divergenz ist trotzdem Null, $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$. Es sollte also außer der Divergenz noch eine zweite Operation geben, die Änderungen der Felder beschreibt, und daher $\vec{\nabla}$ in irgendeiner Form benutzt.

²Forschungsausblick: Die experimentelle Suche nach magnetischen Monopolen, die Quellen des magnetischen Feldes darstellen würden, hat bisher zu keiner Entdeckung geführt. Es gibt weiterhin experimentelle Suchen, z.B. durch das MoEDAL-Experiment am CERN.

- 3 Durch Abzählen der Gleichungen sehen wir, dass uns noch etwas fehlen muss: $\vec{E}$ und $\vec{B}$ haben insgesamt 6 Komponenten, aber $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ sind jeweils nur zwei Gleichungen. (Wichtig für die richtige Zählweise ist, zu berücksichtigen, dass es keine Vektorgleichungen sind, weil die Divergenz aus einem Vektor ein Skalar, also eine einzelne Größe bildet.)

Klarerweise fehlen also noch Gleichungen, und zwar

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Faraday'sches Induktionsgesetz,} \quad (5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (\text{erweitertes) Ampère'sches Gesetz.} \quad (6)$$

Hierin ist $\vec{J}$ die Stromdichte und

$$\mu_0 = 1.257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \quad (7)$$

die magnetische Permeabilität des Vakuums.³ Diese Gleichungen erfüllen unsere oben gestellten Forderungen: Sie enthalten Zeitableitungen der Felder und liefern zwei Zusatzgleichungen.⁴ Die Größe $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ beschreibt klarerweise eine räumliche Änderung des Feldes, aber welche? Diese Größe heißt die Rotation von $\vec{E}$, d.h., wir erwarten, dass sie misst, wie das Vektorfeld "rotiert". Anschaulich gesprochen: Wenn das Vektorfeld die Geschwindigkeit von Wasser in einem Bereich eines Wasserbeckens beschreibt, dann impliziert eine nicht-verschwindende Rotation des Vektorfeldes, dass ein mit-schwimmendes Teilchen in (nicht notwendigerweise geschlossenen) Kreisbahnen schwimmt. Wir gehen zurück zum Beispiel $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$, das eine verschwindende Divergenz hatte und erweitern auf drei Dimensionen $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann berechnen wir

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} V_z - \frac{\partial}{\partial z} V_y \\ -\frac{\partial}{\partial z} V_x - \frac{\partial}{\partial x} V_z \\ \frac{\partial}{\partial x} V_y - \frac{\partial}{\partial y} V_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Dieses Ergebnis deckt sich mit der Intuition, was die Rotation eines Vektorfeldes bedeutet, siehe Fig. 3.

Die 3. und 4. Maxwell-Gleichung beschreiben somit, wie sich Feldlinien des elektrischen und magnetischen Feldes *winden*, und diese Windung zu einer Änderung der Feldstärke in der Zeit führt.

Einschub: Begriff des Feldes

Wir haben oben schon den Begriff des Feldes benutzt, aber wollen ihn jetzt nochmal etwas genauer einführen. Ein Feld ist eine physikalische Größe, die an jedem Punkt im Raum (bzw. in Raum und Zeit) definiert ist. Ein erstes anschauliches Beispiel ist die Temperatur $T(\vec{x})$, die an jedem Punkt

³Ein Kommentar zu Einheitensystemen: Es gibt auch ein Einheitensystem, in dem $\epsilon_0 = 1 = \mu_0$ gesetzt wird, d.h., Sie finden in Literatur auch Formen der Maxwellgleichungen ohne diese Konstanten (aber mit Faktoren von 4π). Wir werden versuchen, uns konsistent an ein Einheitensystem zu halten (oder es explizit zu markieren, wenn wir das Einheitensystem wechseln).

⁴Ein Abzählen der Gleichungen suggeriert jetzt, dass es eventuell zu viele Gleichungen sein könnten, denn wir haben jetzt insgesamt acht Gleichungen (geschrieben als zwei skalare Gleichungen und zwei Vektorgleichungen) für die insgesamt sechs Komponenten der Felder. Wir werden aber sehen, dass es trotzdem nicht-triviale Lösungen gibt. Die Struktur der Gleichungen wird auch später noch klarer werden.

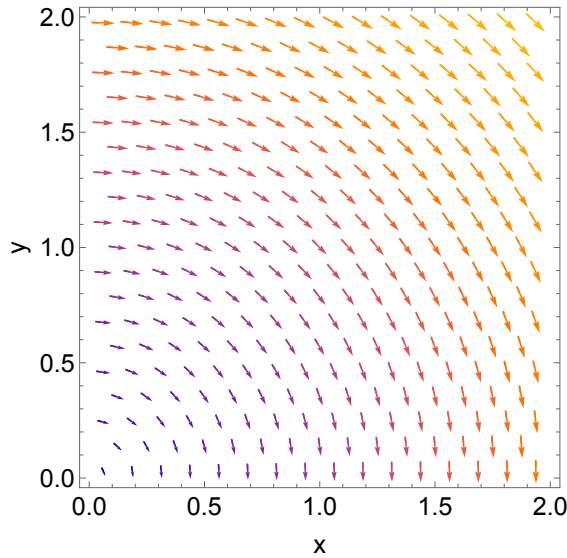


Figure 3: Wir zeigen die $x - y$ -Ebene des Vektorfeldes $\vec{V}$, für $z = 0$.

im Raum definiert ist. Ganz anschaulich: wenn Sie durch Heidelberg laufen, ist die Temperatur an jedem einzelnen Punkt definiert; es gibt keinen Punkt "ohne Temperatur".

Die Temperatur ist eine ein-komponentige Größe, d.h. sie besteht aus einer einzelnen Zahl pro (Raumzeit-)Punkt. Es gibt aber auch Felder, die aus Vektoren, also gerichteten Größen, bestehen. Wenn wir bei der Temperatur bleiben, dann ist ein Beispiel der Temperaturgradient, $\nabla T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} T(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial y} T(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} T(x, y, z) \end{pmatrix}$. Um nicht nur den Betrag, sondern auch die Richtung anzugeben, braucht man die drei Komponenten für die drei Richtungen des Raumes.

Beachten Sie, dass Vektorfelder nicht einfach beliebige 3-komponentige Objekte sind, sondern 3-komponentige Objekte, die auf bestimmte Art und Weise unter Rotationen des Raumes transformieren, nämlich genau wie der Ortsvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Elektrisches und magnetisches Feld sind Vektorfelder, d.h., durch Betrag und Richtung definiert. Bald werden wir das Konzept eines Vierervektors einführen, der vier Komponenten hat und einen Raumzeit-Vektor darstellt. Entsprechend werden wir dann auch ein Vektorfeld einführen, das durch einen Vierervektor dargestellt wird. Dies wird im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie wichtig.

2.2 Herleitung der Wellengleichung aus den Maxwell-Gleichungen

Wir werden jetzt herleiten, wie sich aus den Maxwell-Gleichungen die Wellengleichung für elektromagnetische Wellen ergibt – wir werden also sehen, wie die Maxwell-Gleichungen Licht erklären. Dafür betrachten wir die Maxwell-Gleichungen im Vakuum, also in der Abwesenheit von Quellen und setzen daher

$$\rho = 0, \quad \vec{J} = 0. \quad (9)$$

Damit folgt dann direkt, dass das $\vec{E}$ - und $\vec{B}$ -Feld divergenzfrei sein müssen,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (11)$$

Trotzdem erwarten wir, dass es nicht-verschwindende $\vec{E}$ - und $\vec{B}$ -Felder geben kann, denn

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (12)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (13)$$

sagen uns, dass zeitliche Änderungen in $\vec{E}$ eine Rotation in $\vec{B}$ hervorrufen (und umgekehrt). Wir erwarten daher, dass es eine nicht-triviale Lösung der Maxwell-Gleichung im Vakuum geben kann, in der $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sich gegenseitig hervorrufen, ohne dass sie durch Quellen erzeugt werden.

Wir kennen mit der Wellengleichung bereits eine Gleichung, die beschreibt, wie eine Größe sich in Raum und Zeit beständig verändert, ohne dass sie durch einen Quellterm erzeugt wird. Also versuchen wir, aus den Maxwell-Gleichungen Wellengleichungen herzuleiten und deshalb nehmen wir als erstes eine partielle Zeitableitung von Glg. (12) und erhalten

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (14)$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass partielle Ableitungen nach Raum und Zeit vertauschen. Da wir auf der rechten Seite nun $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ haben, liegt es nahe, als nächstes Glg. (13) einzusetzen. Damit erhalten wir

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}). \quad (15)$$

Die rechte Seite können wir weiter umformen und zwar mit Hilfe der folgenden Identität:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}. \quad (16)$$

Diese Identität wird in den Übungen gezeigt. Hierin gilt, dass $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ ein skalarer (also einkomponentiger) Ausdruck ist. $\vec{\nabla}$ wirkt auf diesen skalaren Ausdruck als Gradient, d.h., misst die Änderung des Skalars $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ in die verschiedenen räumlichen Richtungen. $\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$ ist damit wieder ein Vektor. Im zweiten Term ist $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ein Skalar, und wirkt auf den Vektor $\vec{E}$.

Wir benutzen jetzt die erste Maxwell-Gleichung im Vakuum, also Glg. (10). Damit verschwindet der erste Term auf der rechten Seite von Glg. 16, denn $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ ist überall Null und damit ist auch der Gradient dieser Größe Null.

Wir erhalten

$$\boxed{\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = 0.} \quad (17)$$

Dies ist die dreidimensionale Wellengleichung, d.h., eine Wellengleichung in den drei Raumdimensionen x, y, z . Gleichzeitig ist es eine Vektorgleichung, d.h., wir haben eine dreidimensionale Wellengleichung für jede der drei Komponenten von $\vec{E}$.

Wir bemerken, dass das negative Vorzeichen auf der rechten Seite von Glg. (13) entscheidend ist,

denn es bewirkt das negative Vorzeichen zwischen dem ∂_t^2 und dem $\vec{\nabla}^2$ Term. Ohne dieses negative Vorzeichen wäre die Differenzialgleichung keine Wellengleichung.

Damit haben wir nun etwas Überraschendes erreicht, denn wir haben es geschafft, $\vec{E}$ von $\vec{B}$ zu “entkoppeln”. Wir werden aber später sehen, dass $\vec{E}$ und $\vec{B}$ trotzdem nicht unabhängig voneinander sind, denn es müssen ja weiterhin auch alle vier Maxwell-Gleichungen (10)-(13) gelten, und nicht nur die daraus hergeleitete Wellengleichung. Die Konsequenzen, die sich daraus ergeben, und aus den “elektrischen Wellen”, die die Lösungen von Glg. (17) darstellen, “elektromagnetische Wellen” machen, werden wir weiter unten noch genauer anschauen.

Analog zur Wellengleichung für $\vec{E}$ lässt sich eine Wellengleichung für $\vec{B}$ herleiten. Diese Herleitung betrachten Sie in den Übungen, und das Resultat ist

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{B} = 0. \quad (18)$$

Zunächst betrachten wir die Wellengleichung für $\vec{E}$ genauer. In einer Wellengleichung beschreibt der relative Faktor zwischen dem zeitlich und dem räumlichen Term, wie schnell die Welle propagiert. Dass an dieser Stelle in der Gleichung das Quadrat einer Geschwindigkeit stehen muss, sieht man auch schon durch Betrachtung der Einheiten: $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ hat Einheiten s^{-2} (in SI-Einheiten, in denen Zeit in Sekunden gemessen wird) und $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ hat Einheiten m^{-2} (in SI-Einheiten, in denen Längen in Metern gemessen werden).

Diese Geschwindigkeit gibt uns möglicherweise Aufschluss über die physikalische Natur der Wellen, die wir hier betrachten. Daher rechnen wir sie jetzt aus.

Mini-Übung 2. Wie groß ist die Geschwindigkeit, die Sie in der Wellengleichung finden? Welche Vermutung legt Ihr Resultat nahe?

Lösung.

$$\begin{aligned} \mu_0 \epsilon_0 &= 1.257 \cdot 10^{-6} \frac{N}{A^2} \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} \\ &= 1.113 \cdot 10^{-17} \frac{s^2}{m^2}, \end{aligned} \quad (19)$$

wobei wir nutzen, dass folgende Beziehungen zwischen den Einheiten bestehen $V = \frac{Nm}{C}$ und $A = \frac{C}{s}$.

Die resultierende Geschwindigkeit ist

$$\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}^{-1} = 2.9979 \cdot 10^8 \frac{m}{s}. \quad (20)$$

Dies ist die Lichtgeschwindigkeit. Dieses Resultat legt die Vermutung nahe, dass elektromagnetische Wellen nichts anderes als Licht sind.

In der Tat entspricht Licht elektromagnetischen Wellen. Aus den Maxwell-Gleichungen bekommen wir also nicht nur eine Vereinheitlichung elektrischer und magnetischer Phänomene, sondern noch eine zusätzliche Vereinheitlichung mit optischen Phänomenen.

Eine solche Vereinheitlichung – und damit einhergehende Reduktion in der Zahl der fundamentalen physikalischen Gesetze – ist ein wichtiges Ziel in der Physik. Etwas vereinfacht gesagt: je mehr

verschiedenartige physikalische Phänomene sich in Übereinstimmung mit experimentellen Daten und Beobachtungen aus einem fundamental Gesetz herleiten lassen, desto besser.

Nebenbemerkung: Die Vereinheitlichung setzt sich weiter fort: im Standardmodell der Teilchenphysik wird der Elektromagnetismus mit der schwachen Wechselwirkung (also der schwachen Kernkraft) vereinheitlicht zur elektroschwachen Theorie, die an Teilchenbeschleunigern durch experimentelle Resultate gestützt wird.

Forschungsausblick: Eine weitere Vereinheitlichung mit der starken Wechselwirkung zu einer großen vereinheitlichten Theorie (Grand Unified Theory) ist zwar theoretisch möglich, aber (noch?) nicht nur durch experimentelle Resultate gestützt. Zwei Ansätze zur Quantengravitation, einerseits die Stringtheorie und andererseits die Asymptotisch sichere Quantengravitation, führen auch beide zu einer Vereinheitlichung des Standardmodells mit der Gravitation, allerdings auf eine Art und Weise, die sich zumindestens auf der mathematischen Ebene unterscheidet.

2.3 Lösungen der elektromagnetischen Wellengleichung

Wir haben nun jeweils eine Wellengleichung für $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Bedeutet das, dass es unabhängige elektrische und magnetische Wellen gibt? Wie oben bereits angedeutet, lautet die Antwort "Nein", denn eine gültige Lösung muss natürlich auch die ursprünglichen Maxwellgleichungen im Vakuum erfüllen und die 3. und 4. Maxwellgleichung setzen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ zueinander in Beziehung.

Kurz gesagt, gilt Folgendes:

$$\text{Maxwell-Gleichungen im Vakuum} \Rightarrow \text{Wellengleichungen für } \vec{E} \text{ und } \vec{B}, \quad (21)$$

aber nicht umgekehrt. Damit ist jede Lösung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum auch eine Lösung der Wellengleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$, aber das umgekehrte gilt nicht: nicht jede Lösung der Wellengleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ist eine Lösung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum.

Die Lösungen sind wegen der Verknüpfung von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ durch die 3. und 4. Maxwellgleichung elektromagnetische Wellen. Diese betrachten wir nun.

Wir betrachten ebene Wellen, deren Wellenfronten in einer Ebene propagieren. Wir wählen dazu unser Koordinatensystem oBdA so, dass die ebenen Wellen in x -Richtung propagieren und nicht von y und von z abhängen, d.h. $\partial_y \vec{E} = 0 = \partial_z \vec{E}$. Wenn wir die Unabhängigkeit von y und von z in die 1. Maxwellgleichung einsetzen, erhalten wir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = 0 \rightarrow \partial_x E_x = 0. \quad (22)$$

Daraus folgt, dass $E_x = \text{konst.}$ Ein konstantes elektrisches Feld können wir immer zu einer Lösung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum hinzuaddieren und erhalten eine neue Lösung. Daher können wir oBdA $E_x = 0$ wählen. In der Ebene, die orthogonal zur Propagationsrichtung steht, also in unserem Fall der $y - z$ -Ebene, haben wir nun eine Wahl. In dieser Ebene kann die Amplitude entweder einfach in einer Richtung oszillieren; das nennen wir lineare Polarisierung. Die Amplitude kann in dieser Ebene auch eine Zeitabhängigkeit aufweisen; das gibt uns elliptische oder zirkuläre Polarisierung, zu der wir noch zurückkommen werden.

Jetzt konzentrieren wir uns auf die lineare Polarisierung, d.h. die Oszillation entlang einer einzelnen Richtung. oBdA können wir für diese Richtung die y -Richtung wählen. Daher suchen wir nun

nach Lösungen der Form

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E(x, t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

wobei $E(x, t)$ die eindimensionale Wellengleichung erfüllt, d.h.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0. \quad (24)$$

Die allgemeinste Lösung dieser Gleichung ist von der Form

$$E(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct). \quad (25)$$

Mini-Übung 3. Überzeugen Sie sich davon, dass

$$E(x, t) = f(x - \alpha t) + g(x + \alpha t) \quad (26)$$

eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung nur für $\alpha = c$ ist. (In den Übungsaufgaben werden Sie kennenlernen, wie man Lichtkegelkoordinaten nutzen kann, um diese Lösung herzuleiten.)

Lösung.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (f(x - \alpha t) + g(x + \alpha t)) = \left(\frac{\alpha^2}{c^2} - 1 \right) \cdot (f''(x - \alpha t) + g''(x + \alpha t)), \quad (27)$$

wobei f'' und g'' jeweils die zweite Ableitung nach dem Argument der Funktion bedeuten. Für beliebige f und g ist jeweils die zweite Ableitung nicht Null (und auch $f'' \neq -g''$), so dass $\alpha^2 = c^2$ folgt.

Wichtig ist hierbei, dass x und t nicht als *getrennte* Argumente von f bzw g auftauchen, sondern dass f bzw. g jeweils nur *ein einzelnes Argument*, nämlich die Kombination $x - ct$ bzw $x + ct$ haben.

Hierbei beschreiben Funktionen mit dem Argument $x + ct$ nach *links* (zu kleineren x) propagierende Lösungen und Funktionen mit dem Argument $x - ct$ nach *rechts* (zu größeren x) propagierende Lösungen. Warum das so ist, kann man z.B. graphisch sehen, s. Fig. 4.

Die wichtigste Klasse von Lösungen der Wellengleichung sind die monochromatischen ebenen Wellen, die mit einer einzigen, konstanten Frequenz ω oszillieren. (Wir benutzen ein kleines griechisches omega für die Frequenz.) Warum das die wichtigste Klasse von Lösungen ist, werden wir noch genauer sehen, wenn wir in der Vorlesung auf Fouriertransformationen zu sprechen kommen.

Zum Beispiel ist eine nach rechts propagierende, monochromatische ebene Welle, deren Phase bei $x = 0$ und $t = 0$ Null ist, gegeben durch

$$E = E_0 \sin \left(\omega \left(\frac{x}{c} - t \right) \right). \quad (28)$$

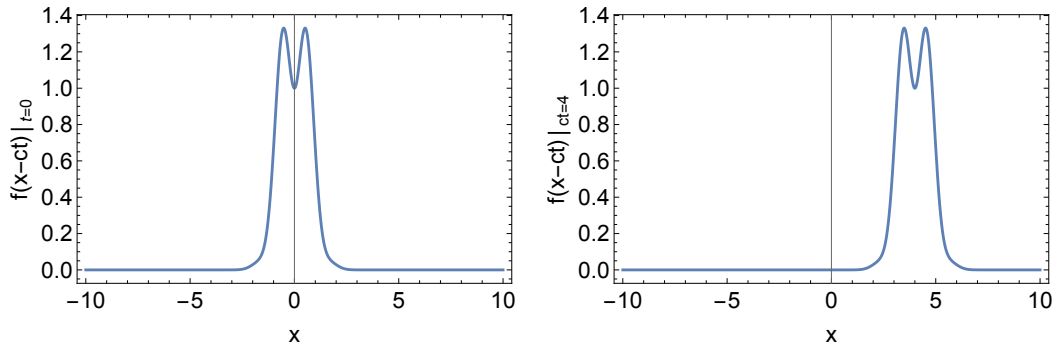


Figure 4: Wir zeigen eine Funktion $f(x-ct)$ bei $t=0$ (links) und die gleiche Funktion bei $ct=4$ (rechts). Man sieht, dass es eine nach rechts (zu größerem x) wandernde Lösung ist.

Dies wird oft geschrieben mit Hilfe der

$$\text{Wellenzahl } k, \quad (29)$$

als

$$E = E_0 \sin(kx - ct), \quad (30)$$

so dass die folgende *relativistische Dispersionsrelation* gelten muss

$$\omega^2 = c^2 k^2. \quad (31)$$

Dabei ist eine Dispersionsrelation die Beziehung zwischen der Wellenzahl k , die die Häufigkeit von Oszillationen im Raum (bei festgehaltener Zeit) zählt und ω die Frequenz in der Zeit. Warum die obige Dispersionsrelation *relativistisch* heißt, werden wir noch sehen, wenn wir zur Speziellen Relativitätstheorie kommen.

Ausblick: Die relativistische Dispersionsrelation $\omega^2 = c^2 k^2$ wird Ihnen noch oft begegnen, denn sie kommt immer vor, wenn es darum geht, die Dispersionsrelation von masselosen Teilchen in relativistischen Theorien zu beschreiben. Zum Beispiel gilt sie für alle Teilchen, die mit den fundamentalen Wechselwirkungen assoziiert sind. Das Beispiel, was unserer Vorlesung am nächsten ist, sind Photonen, also die Quanten des elektromagnetischen Feldes. Die gleiche Dispersionsrelation gilt aber z.B. auch für Gluonen, die Quanten der starken Wechselwirkung, oder Gravitonen, die Quanten der Gravitationswechselwirkung. Im Gegensatz beschreibt $\omega \sim k^2$ eine nicht-relativistische Dispersionsrelation, die z.B. in Feldtheorien, wie sie in kondensierter Materie genutzt werden, auftritt.

Wir wiederholen die Nomenklatur, die mit monochromatischen, ebenen Wellen assoziiert ist und die Sie vermutlich schon aus früheren Vorlesungen kennen:

- ω ist die *Winkel*frequenz. Die *Frequenz* ist

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (32)$$

und misst, wie oft pro Zeiteinheit ein Wellenmaximum an einem festen Ort vorbeikommt. Wir benutzen fast durchweg ω und bezeichnen diese Größe oft auch etwas verkürzt als die Frequenz.

- Die *Oszillationsperiode*, d.h., die Dauer zwischen zwei Maxima ist

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (33)$$

- Die *Wellenlänge* ist

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad (34)$$

und das elektromagnetische Spektrum umfasst alle Werte von λ , mit $\lambda \in [\sim 3.9 \cdot 10^{-7}\text{m}, \sim 7 \cdot 10^{-7}\text{m}]$ dem sichtbaren Teil des Spektrums

- E_0 ist die Amplitude der Welle.

Wir haben bis jetzt nur das $\vec{E}$ -Feld betrachtet und nehmen jetzt noch das $\vec{B}$ -Feld hinzu. Wie wir in den Übungen herleiten werden, gilt für $\vec{B}$ die gleiche Wellengleichung, wie für $\vec{E}$, d.h., wir können die gleichen Lösungen hinschreiben. Auf Basis der beiden Wellengleichungen gibt es zunächst noch keinen Zusammenhang zwischen $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Wir haben aber schon betont, dass die Wellengleichungen aus den Maxwell-Gleichungen folgen und nicht umgekehrt. Daher ist eine Lösung der Wellengleichungen nicht automatisch auch eine Lösung der Maxwell-Gleichungen. Welche zusätzlichen Zusammenhänge die Maxwell-Gleichungen implizieren, werden wir jetzt gleich sehen.

Wir betrachten auch für $\vec{B}$ eine monochromatische, ebene Welle, deren Amplitude $\begin{pmatrix} B_{0,x} \\ B_{0,y} \\ B_{0,z} \end{pmatrix}$ und

Wellenvektor $\vec{k}_B$ wir aber noch nicht kennen. Wir schreiben also

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_{0,x} \\ B_{0,y} \\ B_{0,z} \end{pmatrix} \cdot \sin(\vec{k}_B \cdot \vec{r} - \omega_B t + \varphi), \quad (35)$$

wobei $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ist und φ eine Phase ist. Es gilt $\omega_B^2 = \vec{k}_B^2 c^2$ als Dispersionsrelation, damit $\vec{B}$ die

Wellengleichung erfüllt. Nun benutzen wir die drei Maxwellgleichungen, in denen $\vec{B}$ vorkommt. Zunächst benutzen wir

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \Rightarrow \vec{k}_B \times \begin{pmatrix} B_{0,x} \\ B_{0,y} \\ B_{0,z} \end{pmatrix} \cos(\vec{k}_B \cdot \vec{r} - \omega_B t + \varphi) &= \frac{-\omega}{c^2} \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \cos(kx - \omega t). \end{aligned} \quad (36)$$

Aus dieser Gleichung lernen wir zwei Dinge: Erstens muss die Gleichung für alle $\vec{r}$ und alle t gelten. Das kann nur gelten, wenn die beiden oszillierenden Anteile gleich oszillieren. Damit muss $\varphi = 0$

sein und $\omega_B = \omega$, sowie $\vec{k}_B = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{k}$, d.h., die beiden Wellen propagieren in die gleiche Richtung

(die durch $\vec{k}$ festgelegt wird) und sind in Phase.

Zweitens muss auch der vektorielle Teil der Gleichung gelten; daraus lernen wir, dass $\begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

senkrecht auf $\vec{k}$ und $\vec{B}$ steht. Damit lernen wir, dass $B_{0,y} = 0$ sein muss.

Wir wissen auch bereits, wenn wir den Betrag der Gleichung benutzen, dass $|\vec{B}| = \frac{\omega}{k c^2} |E| = \frac{k}{\omega} |E|$ gilt.

Als nächstes benutzen wir die Divergenzfreiheit von $\vec{B}$ und erhalten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (37)$$

$$\Rightarrow k \cdot B_{0,x} = 0. \quad (38)$$

Daher bekommen wir $\begin{pmatrix} B_{0,x} \\ B_{0,y} \\ B_{0,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{0,z} \end{pmatrix}$.

Da wir weiter oben schon die Amplitude von B bestimmt haben, als wir noch nicht wussten, ob es auch eine y -Komponente gibt, können wir jetzt dieses Ergebnis nutzen um

$$B_{0,z} = \frac{k}{\omega} E_0 \quad (39)$$

zu folgern.

Als letzten Schritt möchten wir nun überprüfen, dass diese, jetzt vollständig bestimmte Form von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ konsistent mit allen Maxwellgleichungen ist und setzen daher in die noch übrige Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (40)$$

ein. Diese ist automatisch erfüllt, d.h., wir haben jetzt Lösungen der Wellengleichung, die auch Lösungen aller vier Maxwellgleichungen sind.

Zusammenfassung: ebene, monochromatische, elektromagnetische Wellen

Damit erhalten wir also, dass für eine ebene, monochromatische elektromagnetische Welle

- a) $\vec{E}$ und $\vec{B}$ beide nicht-verschwindend sein müssen.
- b) Die räumlichen Oszillationen von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ durch den gleichen Wellenvektor $\vec{k}$ beschrieben werden müssen. Wegen der Dispersionsrelation, die beide erfüllen müssen, um jeweils ihre Wellengleichung zu erfüllen, sind dann auch ihre zeitlichen Frequenzen miteinander verknüpft. Außerdem müssen die Oszillationen von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in Phase sein.
- c) $\vec{E}$ und $\vec{B}$ wegen der Divergenzfreiheit beider Felder jeweils orthogonal zu $\vec{k}$ sein, dass die Propagationsrichtung der Welle beschreibt.
- d) $\vec{E}$ und $\vec{B}$ müssen senkrecht aufeinanderstehen; $\vec{k}$, $\vec{B}$ und $-\vec{E}$ bilden ein rechtshändiges System.

Damit gilt insgesamt die folgende Skizze für monochromatische, ebene elektromagnetische

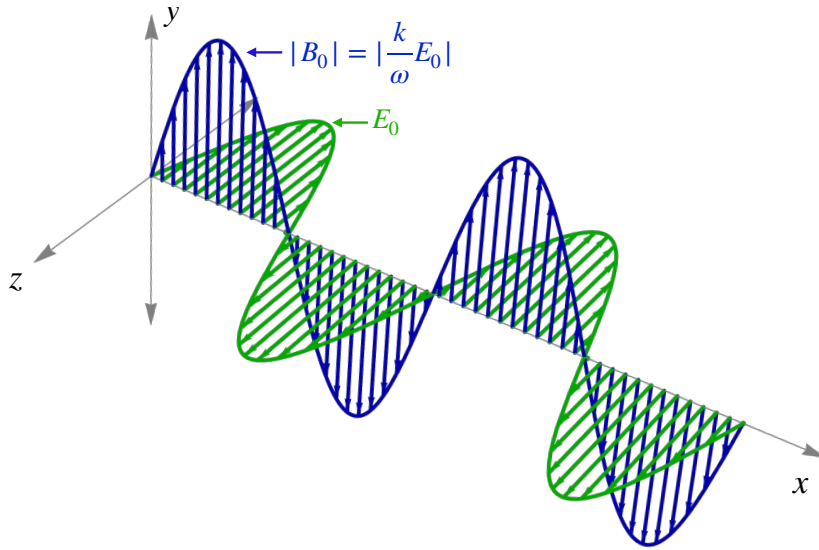


Figure 5: Ebene elektromagnetische Wellen propagieren, indem $\vec{E}$ und $\vec{B}$ senkrecht aufeinander und senkrecht auf der durch $\vec{k}$ beschriebenen Propagationsrichtung stehen und in Phase oszillieren. Konkret gilt: $\vec{k}$, $\vec{B}$ und $-\vec{E}$ bilden ein rechtshändiges System.

Wellen, s. Fig. 5.

Ausblick: Dass elektromagnetische Wellen orthogonal zur Ausbreitungsrichtung oszillieren und nicht longitudinal übersetzt sich in der Quantenbeschreibung von Licht, der Quantenfeldtheorie für Elektromagnetismus, in die Aussage, dass das Photon masselos ist.

Bemerkung: Die Maxwellgleichungen und damit die daraus resultierenden Wellengleichungen sind *linear* in $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Daher gilt das *Superpositionsprinzip*: Sie können beliebige Lösungen aller Gleichungen addieren und erhalten eine neue Lösung. Physikalisch ist diese Eigenschaft zentral, denn sie bedeutet, dass Lichtstrahlen nicht miteinander wechselwirken und Lichtstrahlen, die in unterschiedliche Richtungen den Vorlesungssaal durchqueren, einfach durcheinander durch passieren.

Es gibt eine tiefe mathematische Begründung, warum Licht nicht mit Licht wechselwirkt, und die liegt in der Gruppentheorie. Gruppen beschreiben in der Physik *Symmetrien* und Elektromagnetismus hat eine $U(1)$ Symmetrie, die wir in der Vorlesung noch kennenlernen werden. Diese Symmetrie lässt es zu, dass Licht *keine* Wechselwirkungen mit sich selbst hat.

Ausblick: Diese tiefe mathematische Struktur ist anders für die drei anderen fundamentalen Kräfte. Gravitonen wechselwirken mit Gravitonen (d.h., Gravitationswellen wechselwirken mit anderen Gravitationswellen und es ist nur im Regime sehr kleiner Gravitationswellenamplituden (wie sie bei uns, ausgesendet von Binärsystemen von Schwarzen Löchern, ankommen) möglich, diese Selbstwechselwirkungen zu vernachlässigen. Ebenso haben die Bewegungsgleichungen für die anderen fundamentalen Wechselwirkungen in der Teilchenphysik, nämlich die starke und die schwache Wechselwirkung, Nicht-Linearitäten. Die Teilchen, die in der Quantentheorie diese Wechselwirkungen vermitteln, wechselwirken also auch mit sich selbst. Es gibt eine tiefe, gruppentheoretische Begründung, warum sie das tun *müssen*.

Wir halten also fest: dass Licht nicht mit Licht wechselwirkt (was eine ganz fundamental wichtige

Eigenschaft von Elektromagnetismus ist und für unser Alltagsleben extrem relevant), ist kein Zufall und keine willkürliche Wahl, die wir treffen. Statt dessen hat dies mit den fundamentalen mathematischen Strukturen der Maxwell-Gleichungen zu tun. Mehr hierzu lernen Sie in den Vorlesungen zur Quantenfeldtheorie.

Ausblick: Wenn man berücksichtigt, dass geladene Materie (also z.B. Elektronen) Quanteneigenschaften haben, kann man (im Rahmen der Quantenfeldtheorie) ausrechnen, dass es sehr kleine nicht-lineare Korrekturen zu den Maxwellgleichungen gibt. Diese werden beschrieben durch den Euler-Heisenberg-Lagrangian und sind durch Licht-Licht-Streuung erst kürzlich am LHC nachgewiesen worden.

Aktuelle Forschungsfrage: Die Streuung von Licht an Licht auch an Hochintensitätslasern nachweisen zu können ist ein aktuelles Ziel von experimenteller Forschung.

Bemerkung: Rein praktisch ist es einfacher, mit komplexen Exponentialfunktionen zu rechnen, als mit Sinus und Cosinus. Daher erweitern wir oft wie folgt:

$$E = E_0 \sin(kx - \omega t) \rightarrow E = E_0 e^{i(kx - \omega t)}. \quad (41)$$

Dabei ist klar, dass ein komplexes elektrisches Feld natürlich nicht physikalisch sein kann. Physikalisch sind jeweils nur der Real- und Imaginärteil für sich genommen, wobei gilt

$$e^{i(kx - \omega t)} = \cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t). \quad (42)$$

Es gilt auch, dass von einer komplexen Lösung der Maxwell-Gleichungen jeweils Real- und Imaginärteil für sich genommen auch die Maxwellgleichungen erfüllen, daher ist diese Erweiterung sinnvoll. Wir müssen uns allerdings merken, dass Größen, die nicht linear in $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind, wie z.B. die im elektromagnetischen Feld gespeicherte Energie (die durch den Poynting-Vektor beschrieben wird), erst ausgerechnet werden dürfen, nachdem wir den Realteil (oder Imaginärteil) von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ isoliert haben.

Zum Abschluss unserer Diskussion von elektromagnetischen Wellen kommen wir noch auf die Polarisation zurück. Bei einer ebenen Welle, deren Ausbreitungsrichtung durch $\vec{k}$ gegeben ist, liegt die Amplitude des $\vec{E}$ -Feldes in der Ebene, die senkrecht zu $\vec{k}$ ist. Wir spannen diese Ebene auf durch zwei Vektoren, $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ und können dann eine ebene Welle schreiben als

$$\vec{E} = \text{Re} \left((E_1 \vec{e}_1 + E_2 \vec{e}_2) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right). \quad (43)$$

Dabei sind E_1 und E_2 die maximalen Amplituden in Richtung $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$. Im einfachsten Fall, dem Fall von linearer Polarisation, sind E_1 und E_2 reell (oder rein imaginär); im allereinfachsten Fall ist dann zusätzlich entweder E_1 oder E_2 Null, und die ebene Welle oszilliert nur in der entsprechend anderen Richtung.

Den Fall von *zirkulärer Polarisation* bekommen wir für $E_2 = \pm i E_1$. Dann ist die Amplitude des

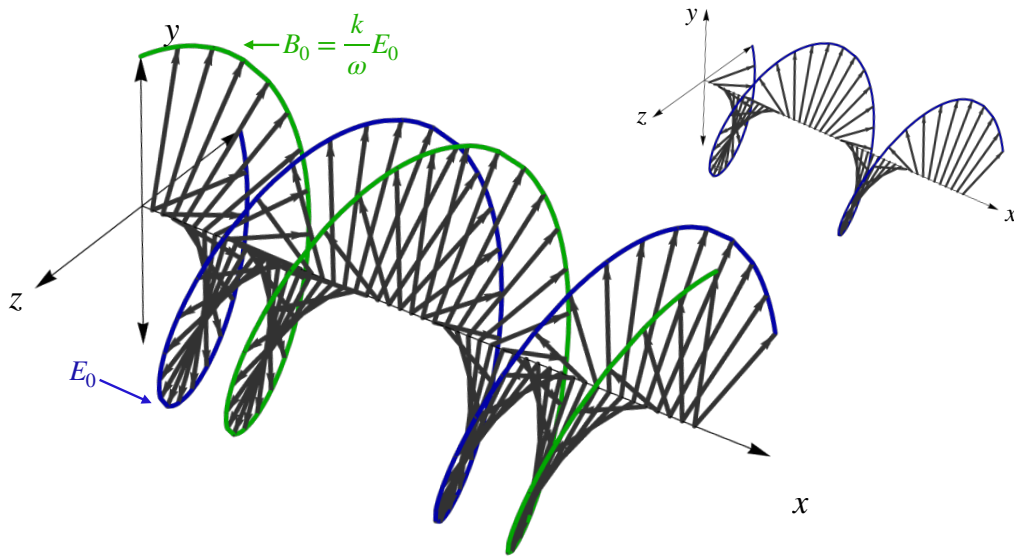


Figure 6: Wir zeigen eine in x -Richtung propagierende, zirkulär polarisierte Welle. Oben rechts sehen wir nur das elektrische Feld, dessen Amplitude konstant ist, und innerhalb der $y-z$ -Ebene rotiert. Das dazugehörige $\vec{B}$ -Feld steht immer orthogonal auf dem $\vec{k}$ -Vektor und dem $\vec{E}$ -Feld und rotiert daher auch.

Feldes konstant, aber sie rotiert in der $\vec{e}_1$ - $\vec{e}_2$ -Ebene. Dies betrachten wir einmal genauer:

$$\vec{E} = \text{Re} \left((E_1 \vec{e}_1 \pm i E_1 \vec{e}_2) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right) \quad (44)$$

$$= \text{Re} \left((E_1 \vec{e}_1 \pm i E_1 \vec{e}_2) \cdot \left(\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + i \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right) \right) \quad (45)$$

$$= E_1 \vec{e}_1 \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \mp E_1 \vec{e}_2 \cdot \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t). \quad (46)$$

Betrachten wir diesen Ausdruck bei einer festen Zeit, z.B. der Einfachheit halber bei $t = 0$. Dann sehen wir, dass der Anteil in $\vec{e}_2$ -Richtung gerade um $\pi/2$ phasenverschoben gegenüber dem Anteil in $\vec{e}_1$ -Richtung ist. Es ergibt sich insgesamt das Bild in Fig. 6.

2.4 Verständnisfragen zu diesem Kapitel

Die folgenden Fragen zu den wichtigsten Ergebnissen in diesem Kapitel sollen Ihnen helfen, sich einen Überblick über den Stoff zu verschaffen und zu überprüfen, ob Sie die wichtigsten Konzepte verstanden haben oder in der Vorlesung/im Tutorium dazu noch Fragen stellen wollen.

Die Antworten zu diesen Fragen finden Sie im Skript.

- Wie funktioniert die Herleitung der Wellengleichung aus den Maxwell-Gleichungen?
- Wie sieht jeweils eine zu größeren und zu kleineren x -Werten propagierende Lösung der Wellengleichung aus?
- Ist jede Lösung der Wellengleichung auch automatisch eine Lösung der Maxwell-Gleichungen? Warum bzw. warum nicht?

- d) Wie stehen bei ebenen Wellen der Wellenvektor $\vec{k}$ und das $\vec{E}$ - und $\vec{B}$ - Feld aufeinander?
Skizzieren Sie eine ebene elektromagnetische Welle.
- e) Was sind lineare und zirkuläre Polarisation?

3 Spezielle Relativitätstheorie

3.1 Motivation: Die Lichtgeschwindigkeit ist eine besondere Geschwindigkeit

Wir werden zur Wellengleichung für elektromagnetische Wellen später in der Vorlesung wieder zurückkehren. Zunächst nehmen wir die Tatsache, dass elektromagnetische Wellen im Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit propagieren, zum Anlass, um die relativistische Formulierung der Elektrodynamik einzuführen.

Die Spezielle Relativitätstheorie beruht auf dem Axiom – unterstützt durch Experimente wie z.B. das Michelson-Morley-Experiment – dass die Lichtgeschwindigkeit für alle inertialen (also mit gleichförmiger Geschwindigkeit gegeneinander bewegten) Beobachter:innen gleich ist. Dies ist anders für andere Geschwindigkeiten, wie wir aus unserer Alltagserfahrung kennen: eine Fahrradfahrerin, die gegenüber einer Person, die auf einer Bank sitzt, gleichförmig (also unbeschleunigt) mit 30 km/h unterwegs ist, ist gegenüber einem Fahrradfahrer, der selbst mit 25 km/h in die selbe Richtung unterwegs ist, nur mit 5 km/h unterwegs. Die 30 km/h gegenüber der Person auf der Parkbank sind also keine besondere Geschwindigkeit und verschiedene inertielle Beobachter:innen ordnen der Fahrradfahrerin unterschiedliche Geschwindigkeiten zu, je nachdem, wie schnell sie selbst gegenüber der Person auf der Parkbank unterwegs sind.

Wenn nun aber die Fahrradfahrerin ihre Fahrradlampe ausschaltet, und wir kurz annehmen, dass die gesamte Situation sich im Vakuum abspielt, dann gilt: Die Fahrradfahrerin, die Person auf der Parkbank und der Fahrradfahrer messen für die Geschwindigkeit, mit der sich das Licht der Fahrradlampe ausbreitet, alle den gleichen Wert von $c = 2.9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, siehe Fig. 7.

Basierend auf diesem Axiom, nämlich dass die Lichtgeschwindigkeit für alle inertialen Beobachter:innen gleich ist, werden wir die Spezielle Relativitätstheorie herleiten. Als Teil des mathematischen For-

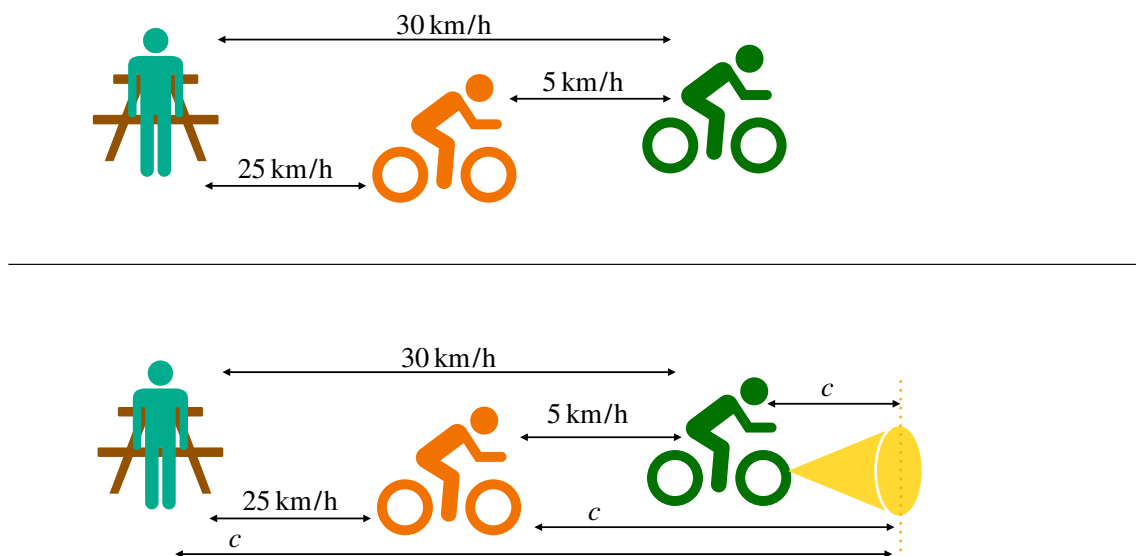


Figure 7: In der oberen Illustration sieht man, dass die Geschwindigkeit der grünen fahrradfahrenden Figur von verschiedenen inertialen Beobachter:innen mit unterschiedlichen Werten gemessen wird. Dies gilt nicht für die Lichtgeschwindigkeit, die von allen inertialen Beobachter:innen als $c = 2.9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ gemessen wird (untere Illustration).

malismus werden wir dabei Vierervektoren kennenlernen. Diese sind konzeptionell und auch in ihrer Notation am Anfang oft etwas herausfordernd – genauso wie das Lernen einer neuen Grammatikregel beim Lernen einer neuen Sprache manchmal herausfordernd sein kann. Die Bedeutung des Konzepts eines Vierervektors (und der damit einhergehenden Notation) für die Physik kann aber kaum unterschätzt werden. Die Quantenfeldtheorie, Allgemeine Relativitätstheorie und alle Anwendungen (in Teilchenphysik, Kosmologie, Physik Schwarzer Löcher) bauen hierauf auf. Es ist die Mühe, die das Lernen dieses Konzepts mit sich bringt, also wert :)

3.2 Lorentztransformationen

Die Lorentztransformation ist von zentraler Bedeutung für viele Bereiche der Physik. Aus ihr folgen wichtige Phänomene wie z.B. die relativistische Längenkontraktion oder Zeitdilatation. Ihre Struktur bestimmt die Eigenschaften von Elementarteilchen in der Quantenfeldtheorie. Die zugrundeliegende Mathematik – die Gruppentheorie – zieht sich durch die gesamte Physik, weil sie die mathematische Sprache ist, in der Symmetrien beschrieben werden, die über Noether's Theorem mit Erhaltungsgrößen verbunden sind.

3.2.1 Galilei-Transformationen und Eigenschaften von Symmetriegruppen

Als ersten Schritt hin zur Herleitung der Lorentztransformation betrachten wir Galilei-Transformationen. Das sind Transformationen, die verschiedene inertielle Beobachter bzw. gleichförmig gegeneinander bewegte Systeme, miteinander verbinden und physikalische Ergebnisse von einem in ein anderes System übersetzen. Die Galilei-Transformation ist die nicht-relativistische Variante dieser Transformation und formalisiert unsere Alltagserfahrung (die aus Systemen kommt, die mit Geschwindigkeit $v/c \ll 1$ propagieren).

Um die Galilei-Transformation und später die Lorentz-Transformation aufzuschreiben, vereinigen wir den Raum ($\mathbb{R}^3$) mit der Zeit ($\mathbb{R}$) in der **Raumzeit** $\mathbb{R}^4$. Punkte darin werden geschrieben als $\begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix}$ und markieren physikalische "Ereignisse" (dabei gilt etwas als "Ereignis", das einem einzigen Zeitpunkt zugeordnet ist; Prozesse, die sich über einen endlichen Zeitraum erstrecken, sind also Ketten von Ereignissen). Wir schreiben die räumlichen Koordinaten oft auch als x^i , mit $i = 1, 2, 3$, d.h., wir schreiben einen Index, der die entsprechende Komponente des Vektors bezeichnet.

In der klassischen Mechanik wirkt eine Symmetriegruppe auf die Raumzeit, nämlich die Galilei-Gruppe. Diese umfasst die folgenden Symmetrie-Transformationen:

- Rotationen

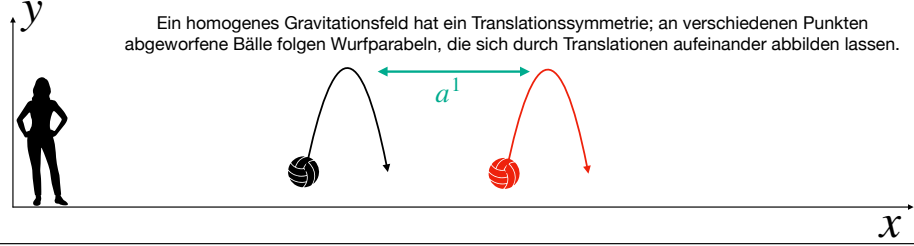
$$\begin{pmatrix} t \\ x^i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t \\ R^i_j x^j \end{pmatrix}, \quad (47)$$

wobei $R \in O(3)$ ist, also eine orthogonale 3x3 Matrix ist. Wir benutzen hier auch die Einstein'sche Summenkonvention, nach der Indizes, die sich wiederholen, summiert werden, d.h.,

$$R^i_j x^j = \sum_{j=1}^3 R^i_j x^j = R^i_1 x^1 + R^i_2 x^2 + R^i_3 x^3. \quad (48)$$

Dies ist nichts anderes als die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor, und ergibt wieder einen Vektor (nämlich den rotierten Ortsvektor).

Aktive Sicht: das physikalische System hat eine Symmetrie



Passive Sicht: wir beschreiben dasselbe System aus verschiedenen Bezugssystemen

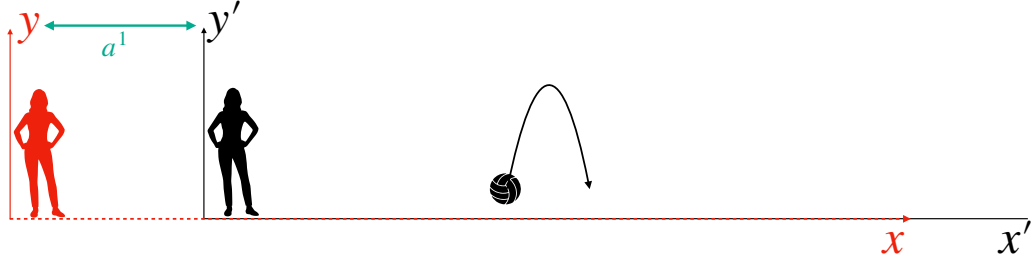


Figure 8: In der obigen Illustration veranschaulichen wir die aktive Sichtweise, in der es eine Symmetrie des physikalischen Systems gibt (hier: ein homogenes Gravitationsfeld hat eine Translationssymmetrie, daher beschreibt ein im gleichen Winkel und mit gleicher Geschwindigkeit an verschiedenen Orten abgeworfener Ball die gleiche Wurfparabel.)

In der unteren Illustration veranschaulichen wir die passive Sichtweise auf eine Symmetrie, in der wir ein einzelnes physikalisches System aus verschiedenen Bezugssystemen (anschaulich gesprochen: der Perspektive verschiedener Beobachter:innen, die jeweils im Ursprung eines Koordinatensystems stehen).

- Translationen (sowohl in der Zeit als auch im Raum)

$$\begin{pmatrix} t \\ x^i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t + s \\ x^i + a^i \end{pmatrix}, \quad (49)$$

wobei $s \in \mathbb{R}$ und $a^i \in \mathbb{R}^3$ ist.

- Galilei'sche Boosts

$$\begin{pmatrix} t \\ x^i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t \\ x^i + v^i t \end{pmatrix}, \quad (50)$$

wobei $v^i \in \mathbb{R}^3$ ein Geschwindigkeitsvektor ist.

Auf diese Transformationen gibt es zwei Sichtweisen:

Aktive Sicht: Die beschriebenen Transformationen sind Symmetrien physikalischer Prozesse, d.h., wenn es eine Lösung der Bewegungsgleichungen gibt, dann gibt es auch weitere Lösungen, die durch die Galilei-Transformationen aufeinander abgebildet werden. Als Beispiel aus der klassischen Mechanik betrachten wir einen Ball, der einer Wurfparabel im Gravitationsfeld der Erde folgt. Wenn Sie dessen Trajektorie bestimmt haben, bekommen Sie die entsprechende Trajektorie für einen um s später abgeworfenen Ball durch eine Translation in der Zeit um s ; für einen in eine andere Richtung abgeworfenen Ball durch eine Rotation mit entsprechendem R usw.

In der aktiven Sicht werden also die Lösungen der Bewegungsgleichungen auf andere Lösungen abgebildet.

Passive Sicht: Hier ändert sich nicht das physikalische System, sondern “nur” das Koordinatensystem (oder auch das Bezugssystem) mit Hilfe dessen wir das System beschreiben. Am anschaulichsten ist es, wenn man sich verschiedene Physiker:innen vorstellt, die alle das gleiche physikalische System beschreiben und jeweils ein Koordinatensystem “mit sich herumtragen”, in dessen Ursprung sie sich befinden. Wir betrachten also zwei Koordinatensysteme K und K' und fordern, dass die Bewegungsgleichungen in K und K' die gleiche mathematische Form haben. Dann sind die Bewegungsgleichung symmetrisch unter Galilei-Transformationen. Für eine Veranschaulichung von aktiver und passiver Sicht betrachten Sie Fig. 8.

Symmetrien werden immer durch Gruppen beschrieben.

Definition einer Gruppe:

Eine Gruppe G ist eine Menge von Elementen $\{g_1, g_2, \dots\}$ (die nicht endlich sein muss), die für eine Symmetriegruppe gerade den Symmetrietransformationen entsprechen. Es gibt eine Operation $\circ$ (Gruppenmultiplikation), die assoziativ ist und so dass weiterhin gilt

a)

$$\forall g_i, g_j \in G : g_i \circ g_j \in G. \quad (51)$$

Anschaulich gesprochen: eine Hintereinanderausführung zweier Symmetrietransformationen ist wieder eine Symmetrietransformation. Zum Beispiel kann man in einem translation-sinvarianten System zwei Translationen hintereinander ausführen und bekommt das gleiche Ergebnis, wie wenn man eine einzelne Translation (um einen entsprechend größeren Parameter) ausführt.

b) Existenz der Eins/Identität:

$$\exists e \in G : g_i \circ e = e \circ g_i = g_i, \forall g_i \in G. \quad (52)$$

Anschaulich gesprochen: die Identität ist auch eine (allerdings triviale) Symmetrietransformation, denn sie lässt natürlich die Bewegungsgleichungen invariant.

c) Existenz des Inversen:

$$\forall g \in G \exists g^{-1} \in G : g \circ g^{-1} = e. \quad (53)$$

Anschaulich gesprochen: Jede Symmetrietransformation kann man durch die inverse Transformation rückgängig machen, z.B. können Sie eine Translation mit a^i in einem translationssymmetrischen System durch die inverse Translation mit $-a^i$ rückgängig machen.

Es gibt Symmetrietransformationen, die in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden können und zum gleichen Ergebnis führen, also

$$g_i \circ g_j = g_j \circ g_i. \quad \text{Kommutativität der Multiplikation für } g_i, g_j. \quad (54)$$

Wenn die Multiplikation für alle Gruppenelemente kommutativ ist, dann ist die Gruppe eine abelsche oder kommutative Gruppe.

Wenn es mindestens zwei Gruppenelemente gibt, für die die Multiplikation nicht-kommutativ ist,

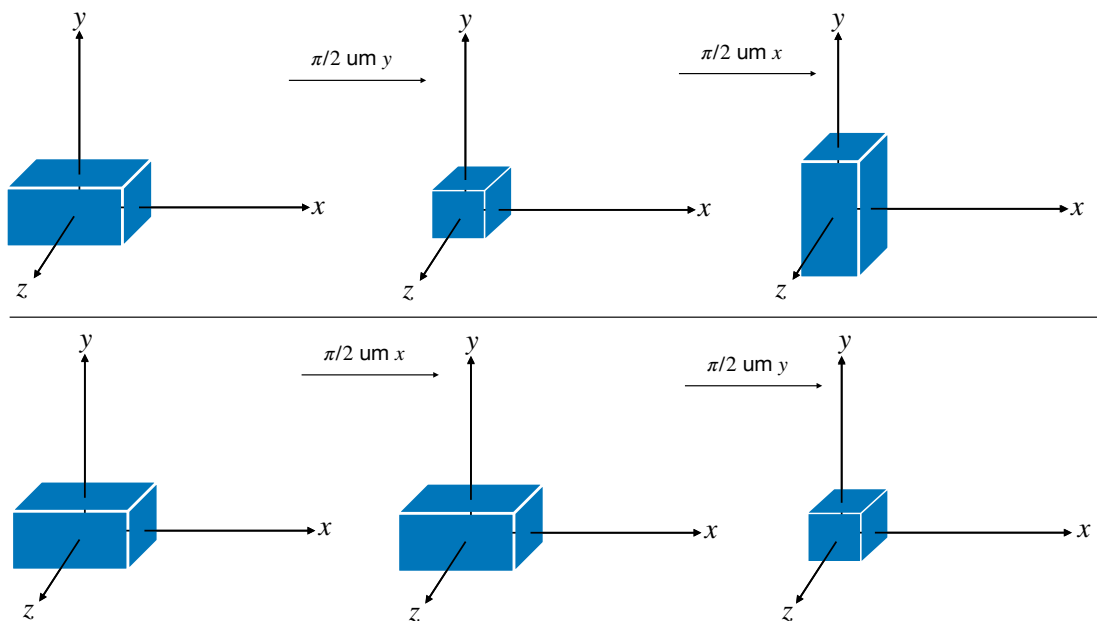


Figure 9: Wir zeigen zwei aufeinanderfolgende Rotationen eines Quaders um jeweils $\pi/2$ um zwei orthogonale Achsen. In der oberen Zeile ist die eine der beiden Reihenfolgen gezeigt, in der unteren Zeile die andere. Das Ergebnis ist unterschiedlich, d.h., Rotationen bilden eine nicht-abelsche, also nicht-kommutative Gruppe.

also die Reihenfolge der Ausführung der beiden Symmetrietransformationen wichtig ist, dann ist die Gruppe eine nicht-abelsche Gruppe.

Translationen, Rotationen und Boosts bilden jeweils für sich eine Gruppe.

Mini-Übung 4. Überlegen Sie sich anschaulich, ob die Gruppe der Translationen und die Gruppe der Rotationen jeweils abelsch oder nicht-abelsch sind. Betrachten Sie für die Rotationsgruppe dazu zwei nacheinander ausgeführte Rotationen um jeweils $\pi/2$ (also 90°) um zwei verschiedene, orthogonale Achsen.

Lösung. Für Translationen können wir uns leicht davon überzeugen, dass die Reihenfolge, in der wir sie ausführen, egal für das Ergebnis ist. (Das liegt letztendlich daran, dass die Addition der einzelnen Translationsvektoren $a_{1,2}^i$, wobei a_1^i der Vektor für die eine der beiden und a_2^i der Vektor für die andere der beiden Translationen ist, kommutiert.) Für Rotationen sehen wir das Ergebnis der Rotation eines Quaders um zwei orthogonal Achsen in Fig. 9.

Bemerkung: Symmetriegruppen sind zentral in vielen Bereichen der Physik. In der Quantenmechanik bestimmt beispielsweise die Rotationsgruppe viele Eigenschaften des Wasserstoffatoms (eigentlich gibt es sogar noch eine versteckte, stärkere Symmetrie), ebenso für viele andere 3-dimensionale Systeme in Quantenmechanik und klassischer Mechanik. In der Elementarteilchenphysik werden viele Eigenschaften von Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen durch die Strukturen von Symmetriegruppen bestimmt. In der Allgemeinen Relativitätstheorie werden viele Eigenschaften von Gravitation durch die Symmetriegruppe, die mit Koordinateninvarianz

verknüpft ist, bestimmt. In Festkörpern werden viele Eigenschaften durch die Struktur von (typischerweise endlichen) Symmetriegruppen der Gitter bestimmt. Phasen und Phasenübergänge in Materie werden durch Eigenschaften von Gruppen bestimmt.

Als nächstes arbeiten wir darauf hin, zu sehen, wo das Problem an Galilei-Transformationen – speziell an Galilei-Boosts – liegt. Die spezielle Rolle der Lichtgeschwindigkeit wird von ihnen nicht berücksichtigt, und das werden wir uns als nächstes erarbeiten.

3.2.2 Nicht-Konstanz der Lichtgeschwindigkeit unter Galilei-Boosts

Es ist ein experimentelles Ergebnis, das wir in der Speziellen Relativitätstheorie zum Axiom erheben, dass elektromagnetische Wellen im Vakuum in allen inertialen Bezugssystemen mit der gleichen Geschwindigkeit $c = 2.9979 \cdot 10^8 \text{m/s}$ propagieren.

Die Lichtgeschwindigkeit bleibt jedoch unter einem Galilei-Boost von System K nach System K' nicht gleich. Dies können wir daran sehen, dass sich bei einem Galilei-Boost von K nach K' *jede* Geschwindigkeit ändert. Wir betrachten dazu eine Trajektorie $\begin{pmatrix} t \\ \vec{x}(t) \end{pmatrix}$ (auch Weltlinie genannt), die z.B. das erste Maximum einer sich ausbreitenden elektromagnetischen Welle beschreiben könnte. Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ ist

$$\vec{w} = \left. \frac{d\vec{x}}{dt} \right|_{t=0} = \dot{\vec{x}}(0). \quad (55)$$

Nach einem Galilei-Boost zu einem anderen Inertialsystem, das sich gegenüber dem ersten System mit Geschwindigkeit $-\vec{v}$ bewegt, erhalten wir dieselbe Weltlinie, dargestellt im System K' , als

$$\begin{pmatrix} t' \\ \vec{x}'(t') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x}(t) + \vec{v} \cdot t \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Hier entspricht $t = 0$ dem Zeitpunkt $t' = 0$ und die Geschwindigkeit der Weltlinie in K' bei $t' = 0$ beträgt

$$\vec{w}' = \left. \frac{d\vec{x}'}{dt'} \right|_{t'=0} = \frac{d}{dt} (\vec{x}(t) + \vec{v} \cdot t) \Big|_{t=0} = \dot{\vec{x}}(0) + \vec{v}. \quad (57)$$

Bei einem Galilei-Boost ändert sich also *jede* Geschwindigkeit; die Wahl $|\vec{w}| = c$ ist nicht ausgezeichnet und verändert sich zu $|\vec{w}'| = c + |\vec{v}|$ (unter der Annahme, dass $\vec{w}$ und $\vec{v}$ parallel sind), genau wie sich jede andere Geschwindigkeit auch verändert. Diese ist im Widerspruch zum Michelson-Morley-Experiment.

Wir stellen also fest: Das Experiment widerlegt die Theorie, dass die Gruppe der Galilei-Transformationen die Symmetriegruppe der Raumzeit darstellt. Im Speziellen sind es die Galilei-Boosts, die das Problem darstellen. Daher gilt: die Transformation, die zwischen zwei mit $\vec{v}$ gegeneinander bewegten Bezugssystemen vermittelt, muss eine andere sein. Wir werden sie jetzt herleiten.

3.2.3 Herleitung der Lorentz-Transformation

Für die Herleitung der Lorentztransformation betrachten wir zunächst nur ein 1+1-dimensionales System, in dem es nur die Raumrichtung gibt, entlang derer der Boost erfolgt. Die beiden orthogonalen räumlichen Richtungen fügen wir später wieder hinzu.

Die allgemeinste Transformation zwischen K und K' ist

$$x' = f(x, t), \quad (58)$$

$$t' = g(x, t), \quad (59)$$

wobei f und g zunächst zwei beliebige Funktionen von x und t sind, deren genaue Form wir jetzt bestimmen wollen.

Als erstes benutzen wir die folgende Argumentation: für ein Teilchen, auf das keine Kräfte wirken, ist die Weltlinie eine Gerade. Dies muss in jedem Bezugssystem gelten. Daher muss durch die Transformation zwischen K und K' eine Gerade wieder auf eine Gerade abgebildet werden. Die gesuchte Transformation muss also eine *lineare* Transformation sein, weil sie sonst eine Gerade auf eine nicht-lineare Funktion $x'(t')$ abbilden würde. Lineare Transformationen können durch Matrizen dargestellt werden

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}. \quad (60)$$

Hierin ist Λ eine Matrix und es ist Konvention für diese Matrix, die die Lorentztransformation eines Ortsvektors darstellt, den griechischen Buchstaben Λ (großes Lambda) zu benutzen.

Wir sind auf der Suche nach der Form dieser Matrix. Da wir nun wissen, dass sich die Transformation als Matrix schreiben lässt, können wir Glg. (58) und (59) direkt vereinfachen zu

$$x' = \alpha_1(v)x + \alpha_2(v)t, \quad (61)$$

$$t' = \alpha_3(v)x + \alpha_4(v)t. \quad (62)$$

Die Koeffizienten α_i sind Funktionen von v , der Geschwindigkeit, mit der K' gegenüber K bewegt ist.

Als nächstes werden wir herleiten, dass

$$\alpha_2 = -\alpha_1 v, \quad (63)$$

gilt, so dass

$$x' = \alpha_1(x - vt). \quad (64)$$

Dies folgt, weil die Beobachterin, die im Ursprung $x' = 0$ in K' sitzt, sich in K mit $x = vt$ bewegt, so dass $x = vt$ auf $x' = 0$ abgebildet wird. Um dies zu erfüllen, muss $\alpha_2 = -\alpha_1 v$ gelten.

Außerdem muss gelten, dass

$$\alpha_1(v) = \alpha_1(-v), \quad (65)$$

d.h., α_1 muss eine gerade Funktion von v sein. Dies muss deshalb gelten, weil die gesuchte Transformation keine Richtung auszeichnen darf (der Raum ist isotrop, d.h., alle Richtungen sind gleichberechtigt). Daher darf α_1 nur von $\vec{v}^2$ abhängen, und nicht von der Richtung von $\vec{v}$.

Wir können nun die gleiche Argumentation aus der Perspektive von K' wiederholen. Aus dieser Perspektive bewegt sich K "rückwärts" mit Geschwindigkeit $-v$.

Mini-Übung 5. Leiten Sie die Form der Koeffizienten in

$$x = \alpha_5 x' + \alpha_6 t', \quad (66)$$

her.

Lösung. Die Herleitung erfolgt durch dieselben Schritte, die wir eben für die Herleitung von $x'(x, t)$ genutzt haben und ergibt

$$x = \alpha_1(x' + v t'). \quad (67)$$

Der Unterschied liegt im Vorzeichen vor dem $v t'$ -Term im Vergleich zum $v t$ -Term.

Jetzt kommen wir an den entscheidenden Punkt, an dem wir den Unterschied zwischen Galilei-Transformationen und Lorentz-Transformationen erhalten werden. Würden wir jetzt eine absolute Zeit fordern, also $t = t'$, dann brächte uns $x' = \alpha_1(x - vt)$ und $x = \alpha_1(x' + vt')$ zu $\alpha_1 = 1$.

Mini-Übung 6. Überzeugen Sie sich davon, dass die Forderung einer absoluten Zeit, also $t' = t$, zu $\alpha_1 = 1$ führt.

Lösung. Wir formen $x' = \alpha_1(x - vt)$ und $x = \alpha_1(x' + vt')$ nach t bzw. t' um und setzen beide dann gleich:

$$\frac{-1}{v} \left(\frac{x'}{\alpha_1} - x \right) = t \stackrel{!}{=} t' = \frac{1}{v} \left(\frac{x}{\alpha_1} - x' \right), \quad (68)$$

$$\Leftrightarrow x'(\alpha_1 - 1) = x(\alpha_1 - 1). \quad (69)$$

Wir bekommen entweder $x' = x$, d.h., $K = K'$, d.h., wir betrachten keine unterschiedlichen Systeme, oder müssen $\alpha_1 = 1$ fordern. So erhalten wir die Galilei-Transformation.

Wir bekommen also aus der Forderung nach einer absoluten Zeit den Galilei-Boost, der inkompatibel mit dem Ergebnis des Michelson-Morley-Experiments ist. Damit lernen wir, dass die Forderung nach einer absoluten Zeit, die allen inertialen Beobachter:innen gemeinsam ist, nicht richtig sein kann.

Wir erwarten also, dass Lorentztransformationen zu $t' \neq t$ führen werden. Die Zeit ist also nicht absolut, sondern relativ, d.h., für unterschiedliche inertielle Beobachter:innen unterschiedlich. Dies ist ein weitreichendes Resultat, das am Fundament der Newton'schen Physik angreift und uns zwingt, unsere Alltagsintuition zu überdenken (jedenfalls für Systeme, die sich mit $v/c \lesssim 1$ gegeneinander bewegen – unsere Alltagsintuition bezieht sich auf Systeme, für die $v/c \ll 1$ gilt).

Jetzt bestehen wir also auf der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit bei Änderungen des Bezugssystems. Ein Lichtstrahl hat in K die Trajektorie

$$x = ct. \quad (70)$$

In K' fordern wir

$$x' = ct', \quad (71)$$

mit dem *gleichen* Wert von c in beiden Bezugssystemen. Wir nehmen auch an, dass der Ursprung der beiden Bezugssysteme zu $t = 0$ und $t' = 0$ überlappt und dass der Lichtstrahl von dort ausgesendet wird. Zusammen mit

$$x' = \alpha_1(x - vt), \quad (72)$$

$$x = \alpha_1(x' + vt'), \quad (73)$$

ergibt sich jetzt durch Einsetzen von Glg. (70) und (71)

$$ct' = \alpha_1(ct - vt), \quad (74)$$

$$ct = \alpha_1(ct' + vt'). \quad (75)$$

Wir benutzen jetzt auf der rechten Seite von Glg. (74) den Ausdruck (75) und erhalten

$$ct' = \alpha_1(c - v)t, \quad (76)$$

$$= \alpha_1(c - v) \frac{\alpha_1}{c} (ct' + vt'), \quad (77)$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{\alpha_1^2}{c} (c^2 - v^2), \quad (78)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (79)$$

Wir haben die Wahl zwischen zwei Vorzeichen, aber das negative Vorzeichen macht physikalisch keinen Sinn, denn es würde positive x auf negative x' abbilden und daher einen Boost mit einer Inversion kombinieren. Wir wählen also das positive Vorzeichen und führen dafür die weitverbreitete Notation

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (80)$$

ein. Dieser sogenannte gamma-Faktor ist eins für kleine Geschwindigkeiten v^2/c^2 und divergiert für $v^2/c^2 \rightarrow 1$. Aus dieser Divergenz sehen wir schon, dass Geschwindigkeiten größer als c physikalisch nicht erlaubt sind, denn wir erhalten dann einen imaginären γ Faktor und würden daher im geboosteten System imaginäre Koordinaten bekommen. Das macht physikalisch natürlich keinen Sinn.

Wir halten also fest: *Die Lichtgeschwindigkeit stellt eine maximale Grenze dar für die Geschwindigkeit von inertialen Beobachter:innen.*

Wir haben jetzt die Transformation

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (81)$$

sowie ihre inverse Transformation

$$x = \gamma(x' + vt') \quad (82)$$

hergeleitet, aber uns fehlen noch die Transformationen zwischen t und t' . Diese bekommen wir, indem wir Glg. (82) nach t' umstellen, und auf der rechten Seite dann den Ausdruck für x' aus

Glg. (81) einsetzen. Dadurch ergibt sich, nach Umformungen

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x). \quad (83)$$

Ebense bekommen wir die inverse Transformation

$$t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x'). \quad (84)$$

Ende von VL 3.

Zusammenfassung Lorentztransformation

Damit haben wir nun die Lorentztransformation zwischen zwei mit v gegeneinander bewegten Bezugssystemen hergeleitet. Wir schreiben jetzt die Verallgemeinerung auf die ursprünglichen 3+1 Raumzeitdimensionen auf, wobei der Lorentzboost weiterhin in x -Richtung ist. In den Übungen wird die Form eines Boosts in eine beliebige Richtung hergeleitet. Für einen Boost in x -Richtung gilt:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (85)$$

$$y' = y, \quad (86)$$

$$z' = z, \quad (87)$$

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x). \quad (88)$$

Dazu gehört die inverse Transformation vom gestrichenen ins ungestrichene System

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad (89)$$

$$y = y', \quad (90)$$

$$z = z', \quad (91)$$

$$t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x'). \quad (92)$$

Hierin ist der gamma-Faktor oder Boost-Faktor

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (93)$$

Der entscheidende Schritt in der Herleitung ist die Forderung, dass Licht in jedem inertialen Bezugssystem mit Geschwindigkeit c propagiert und diese Geschwindigkeit invariant ist.

Wir lernen daraus, dass Zeit nicht absolut ist. t und t' sind nicht gleich, sondern über Glg. (92) miteinander verknüpft.

Wir lernen außerdem, dass die Lichtgeschwindigkeit eine obere Schranke für die Geschwindigkeit von inertialen Bezugssystemen darstellt, da γ für $v^2/c^2 > 1$ nicht reell ist und die Transformation dann nicht mehr zwischen Bezugssystemen mit reellen Koordinaten vermitteln würde.

Absolute Zeit ist allerdings, entgegen unserer Herleitung, aus unserer Alltagserfahrung eine sinnvolle Annahme. Wenn wir z.B. zwischen 14 und 16 Uhr in einem mit 200 km/h fahrenden ICE sitzen, dann können wir trotzdem für 15 Uhr einen Termin für ein Telefonat mit einer in Heidelberg verbleibenden Person ausmachen. Wenn wir dann um 15 Uhr anrufen, dann wird dies auch für die in Heidelberg verbliebene Person 15 Uhr sein. Die Annahme einer absoluten, für alle inertialen

Beobachter:innen geltenden Zeit ist also aus unserer Alltagserfahrung gut motiviert. Trotzdem ist diese Annahme falsch und einfach nur eine sehr gute Näherung, denn in unserem Alltag sind alle Geschwindigkeiten sehr klein gegenüber c . Wir überzeugen uns jetzt, dass für $v^2/c^2 \ll 1$ aus der Lorentztransformation die Galilei-Transformation folgt, und somit die (näherungsweise) Existenz einer absoluten Zeit für Beobachter:innen, die sich mit relativen Geschwindigkeiten $v^2/c^2 \ll 1$ bewegen.

Mini-Übung 7. Zeigen Sie, dass für $v^2/c^2 \ll 1$ aus der Lorentztransformation die Galilei-Transformation folgt.

Lösung. Es gilt

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{v^2}{c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right). \quad (94)$$

In führender Ordnung ist $\gamma = 1$ und damit reduziert sich $t' = \gamma(t - v/c^2 x)$ für $v/c \ll 1$ zu $t' = t$.

3.2.4 Vierer-Vektoren

Wir haben bereits das Konzept eines Vierervektors eingeführt, in dem wir die zeitliche und die räumlichen Komponenten zusammengefasst haben. Es macht Sinn, damit alle Komponenten die gleiche Einheit haben, in die zeitliche Komponente die Lichtgeschwindigkeit aufzunehmen, also

$$\begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad (95)$$

Für diese Vierervektoren werden wir im Folgenden etwas mehr Verständnis, sowie Formalismus und Notation entwickeln.

Am Anfang kann insbesondere die Notation etwas abstrakt wirken und Sie fragen sich vielleicht, warum Sie diese Notation eigentlich lernen sollten. Es gibt zwei wichtige Gründe: Erstens ist die Notation, die wir einführen werden, sozusagen die “Sprache” für relativistische Systeme und wir sparen uns sehr viel umständliche Notation, wenn wir eine dem physikalischen System angemessene Notation einführen. Wenn wir z.B. die relativistische Formulierung der Elektrodynamik ohne diese Notation schreiben würden, hätten wir viel mehr Schreibarbeit und viel unübersichtlichere Gleichungen. Zweitens wird diese Notation verwendet für alle relativistischen Systeme, also in der Allgemeinen Relativitätstheorie, Quantenfeldtheorie, Teilchenphysik,...

Für räumliche Vektoren haben wir bereits eine Indexnotation, indem wir über lateinische Buchstaben die Indizes eines räumlichen Vektors benennen, z.B. $\vec{x} \rightarrow x^i$. Jetzt wollen wir zunächst motivieren, dass Vierervektoren strukturell sowohl Gemeinsamkeiten mit räumlichen Vektoren, als auch entscheidende Unterschiede haben.

Wir können die *Rapidity* ρ definieren über

$$\gamma = \cosh(\rho), \quad (96)$$

Die Rapidity als Funktion von v^2/c^2 ist gezeigt in Fig. 10.

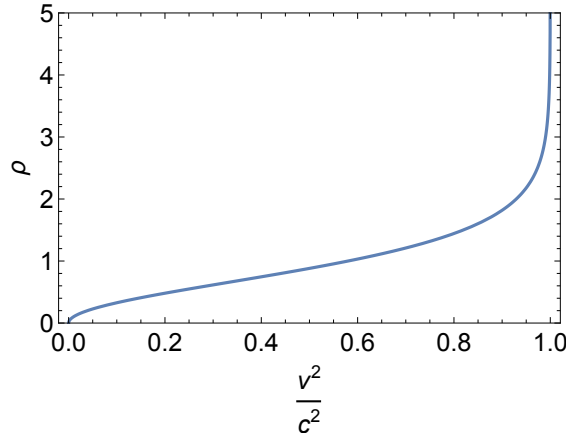


Figure 10: Die Rapidity steigt als Funktion von v^2/c^2 an und divergiert für $v^2/c^2 \rightarrow 1$.

Mit Hilfe der Rapidity können wir Lorentz-Boosts umschreiben. Es gilt

$$\sinh(\rho) = \frac{v}{c} \gamma. \quad (97)$$

Damit können wir die Matrixdarstellung einer Lorentztransformation, wirkend auf $(ct, \vec{x})$ umschreiben

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\rho) & -\sinh(\rho) & 0 & 0 \\ -\sinh(\rho) & \cosh(\rho) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (98)$$

Dies ähnelt einer Rotationsmatrix, wobei die Rapidity ρ die Rolle des Rotationswinkels θ übernimmt:

$$\Lambda[\rho] = \begin{pmatrix} \cosh(\rho) & -\sinh(\rho) & 0 & 0 \\ -\sinh(\rho) & \cosh(\rho) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow R[\theta] = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (99)$$

Was hat es mit dieser Ähnlichkeit auf sich? Und warum gibt es einen sinh statt einem sin (und entsprechend cosh statt cos)?

Dies hat mit dem Unterschied von *räumlichen* Längen zu *raumzeitlichen* Längen zu tun.

Damit wir nicht die ganze Zeit 4x4-Matrizen und Vektoren mit 4 Komponenten explizit aus-schreiben müssen, führen wir jetzt Vierer-Vektor Notation ein:

Wir definieren

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}. \quad (100)$$

Für die Indizes von Vierervektoren benutzen wir kleine griechische Buchstaben, μ ("mü"), ν ("nü"), κ ("kappa"), λ ("lambda"), ρ ("ro"), σ ("sigma")...

Der zeitliche Eintrag hat den Indexwert $\mu = 0$, damit der erste räumliche Eintrag weiterhin $\mu = 1$ haben kann. (Manchmal wird auch eine Konvention verwendet, in der μ von 1 bis 4 statt von 0 bis 3 geht).

Vierer-Vektoren werden ohne Pfeil geschrieben; dieser bleibt dem räumlichen Anteil vorbehalten, der weiterhin auch mit Hilfe lateinischer Indizes ($i, j, k, \dots$) geschrieben wird.

Für einen räumlichen Vektor ist seine Norm (und entsprechend seine Länge) eine entscheidende Größe, vor allem, weil sie unter Rotationen invariant bleibt. Dieses Skalarprodukt können wir mit Hilfe der euklidischen Metrik

$$\delta_{ij} \equiv \mathbb{1}_{3 \times 3}, \quad (101)$$

schreiben:

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = x^i x^j \delta_{ij} = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2, \quad (102)$$

wobei wir die Einstein'sche Summenkonvention benutzen, bei der über doppelt vorkommende Indizes summiert wird. Damit ist

$$x^i x^j \delta_{ij} \equiv \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x^i x^j \delta_{ij}. \quad (103)$$

Wir führen nun die Minkowski-Metrik ein. Diese ist eine 4×4 Matrix, d.h., sie hat zwei Indizes, die jeweils die Werte 0 bis 3 annehmen können und deshalb über jeweils einen Vierer-Index geschrieben werden. Sie wird geschrieben als $\eta_{\mu\nu}$. Als Matrix ist

$$\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (104)$$

Achtung, Konventionswarnung! In verschiedenen Büchern und Skripten werden Sie unterschiedliche Konventionen finden, nämlich sowohl die Konvention, die wir hier benutzen, also $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, als auch die Konvention $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Das absolute Vorzeichen von η hat keine physikalische Bedeutung; nur das relative Vorzeichen zwischen η_{00} und η_{ij} hat eine Bedeutung. Die *Signatur* der Metrik kann also als $(-, +, +, +)$ oder $(+, -, -, -)$ gewählt werden; relevant ist nur, dass es einen Eigenwert gibt mit einem umgekehrten Vorzeichen von den drei anderen Eigenwerten.

Analog zur euklidischen Metrik δ_{ij} , mit der wir die räumliche Länge eines Vektors bestimmen, definieren wir nun die raumzeitliche Länge eines Vierervektors:

$$\vec{x}^2 = x^i x^j \delta_{ij} \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \leftrightarrow x^2 = x^\mu x^\nu \eta_{\mu\nu} \equiv -(x^0)^2 + \vec{x}^2. \quad (105)$$

Hierbei haben wir die Einstein'sche Summenkonvention für Vierervektoren benutzt, nach der über Vierer-Indizes, die sich wiederholen, summiert wird. Entscheidend ist hierbei, dass einer der beiden Indizes oben und der andere unten stehen muss. (Dazu kommen wir weiter unten noch genauer). Was hat es mit dieser merkwürdigen Definition einer "Länge" auf sich, bei der nicht alle Komponenten addiert werden, sondern die räumliche Komponente mit dem umgekehrten Vorzeichen kommt? Konkreter stellen sich zwei Fragen: Erstens, warum ist dies eine sinnvolle Definition? Zweitens, was ist die physikalische Bedeutung von $x^2 < 0$, $x^2 = 0$ und $x^2 > 0$?

Die erste Frage beantworten wir jetzt: Die Definition (105) bleibt, anders als die zunächst vielleicht plausible Alternative $(x^0)^2 + \vec{x}^2$, invariant unter Lorentz-Boosts.

Mini-Übung 8. Starten Sie von $\mp(x^0)^2 + \vec{x}^2$ und überzeugen Sie sich davon, welche Variante invariant unter Lorentzboosts ist. Die physikalische Bedeutung dieser Invarianz ist, dass verschiedene inertielle Beobachter:innen sich einig darüber sind, was der Wert dieser Größe ist.

Lösung.

$$\begin{aligned}
 \mp(x'^0)^2 + (\vec{x}')^2 &= \mp\left(\gamma ct - \frac{v}{c}\gamma x\right)^2 + \gamma^2\left(x - \frac{v}{c}ct\right)^2 + y^2 + z^2, \\
 &= \mp\left(\gamma^2 c^2 t^2 - 2\gamma^2 \frac{v}{c} x ct + \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 x^2\right) + \gamma^2 x^2 - 2\gamma^2 x \frac{v}{c} ct + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} c^2 t^2 + y^2 + z^2 \\
 &= c^2 t^2 \gamma^2 \left(\mp 1 + \frac{v^2}{c^2}\right) + x^2 \gamma^2 \left(\mp \frac{v^2}{c^2} + 1\right) + x ct 2\gamma^2 \frac{v}{c} (\pm 1 - 1) + y^2 + z^2.
 \end{aligned} \tag{106}$$

Wir sehen, dass der Term mit dem grünen Vorfaktor verschwinden muss, damit das Ergebnis wieder $\mp(x^0)^2 + \vec{x}^2$ geben kann. Daraus ergibt sich schon, dass wir das negative Vorzeichen wählen müssen. Wenn wir einmal das negative Vorzeichen gewählt haben, dann gilt aus dem obigen

$$\begin{aligned}
 -(x'^0)^2 + (\vec{x}')^2 &= c^2 t^2 \gamma^2 \left(-1 + \frac{v^2}{c^2}\right) + x^2 \gamma^2 \left(-\frac{v^2}{c^2} + 1\right) + y^2 + z^2, \\
 &= -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \\
 &= -(x^0)^2 + \vec{x}^2.
 \end{aligned} \tag{107}$$

Alternative Rechenwege, die die Matrixform von Λ nutzen, sowohl als Funktion von v/c , als auch geschrieben über die Rapidität, sind natürlich auch möglich.

Streng genommen haben wir die Invarianz unter Boosts in x -Richtung gezeigt. Wir können entweder die Rechnung noch für die Form eines Boosts in eine allgemeine Richtung (wird in den Übungen kommen) durchführen, oder benutzen, dass die x -Richtung nicht ausgezeichnet ist, weil wir ja einen allgemeinen Vektor geboostet haben. Damit gilt unser Ergebnis der Boost-Invarianz unter Ausnutzung der Isotropie des Raumes für alle Richtungen.

Wir sehen also, dass das negative Vorzeichen notwendig ist, weil wir sonst keine Größe bekommen, über deren Wert verschiedene inertielle Beobachter:innen übereinstimmen können.

Der Unterschied zwischen δ_{ij} und $\eta_{\mu\nu}$ ist es also letztendlich, der in (99) den Unterschied zwischen $\cos(\theta)$ und $\cosh(\rho)$ erklärt. Wir sehen auch, dass wir unter einer Lorentztransformation das Analogon zu einer Raum-zeitlichen Rotation verstehen können.

Als zweites beschäftigen wir uns jetzt mit der Frage, was die physikalische Bedeutung davon ist, wenn $x^2 > 0$, $x^2 < 0$ und $x^2 = 0$ gilt. Dazu ist unser Resultat wichtig, dass *Überlichtgeschwindigkeit unphysikalisch ist*, d.h., dass kein physikalisches System mit Überlichtgeschwindigkeit propagieren kann. Wir haben das daran gesehen, dass der gamma-Faktor in einem Lorentz-Boost komplex wird, wenn $v > c$ und daher dann die Koordinaten komplex werden müssten. Das ist klarerweise unphysikalisch. Die Geschwindigkeitsaddition, die in den Übungen hergeleitet wird, zeigt das gleiche Resultat; nämlich, dass die Lichtgeschwindigkeit eine obere Schranke für physikalische Propagation darstellt.

Um die Konsequenzen daraus zu verstehen, ist es hilfreich, ein *Raumzeitdiagramm* zu zeichnen,

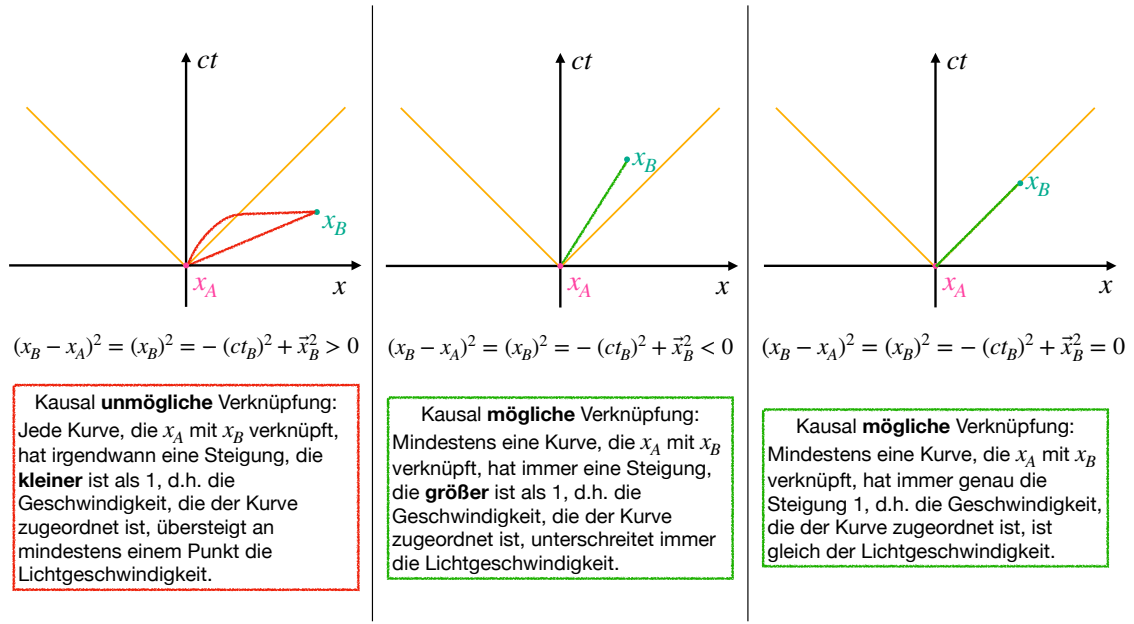


Figure 11: Wir zeigen die physikalische Bedeutung des raumzeitlichen Abstands zwischen x_A und x_B , wenn $(x_B^\mu - x_A^\mu)(x_B^\nu - x_A^\nu)\eta_{\mu\nu}$ größer, kleiner oder gleich Null ist.

in dem ct auf der y -Achse steht und x auf der x -Achse. In einem solchen Diagramm folgt Licht immer genau den Diagonalen, entweder zu negativen oder positiven x , je nach Ausbreitungsrichtung. Wir wissen schon, dass die Lichtgeschwindigkeit eine *obere Schranke* für physikalisch erlaubte Geschwindigkeiten ist. Damit können wir jetzt, wenn es zwei *Ereignisse* x_A^μ und x_B^μ gibt, etwas darüber sagen, ob sie kausal zusammenhängen können. In Fig. 11 zeigen wir in einem Raumzeitdiagramm, was es bedeutet, wenn $(x_B^\mu - x_A^\mu)(x_B^\nu - x_A^\nu)\eta_{\mu\nu}$ größer, kleiner oder gleich Null ist.

Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen für Vierervektoren x^μ :

- $x^2 = x^\mu x^\nu \eta_{\mu\nu} < 0$: x^μ ist ein zeitartiger Vektor. Ereignisse, deren Raumzeitdistanz voneinander zeitartig ist, können über Signale miteinander verknüpft werden, die immer mit Geschwindigkeit kleiner als c propagieren.
- $x^2 > 0$: x^μ ist ein raumartiger Vektor. Ereignisse, deren Raumzeitdistanz voneinander raumartig ist, können *nicht* über Signale miteinander verknüpft werden, die immer mit Geschwindigkeit kleiner als c propagieren. An mindestens einem Punkt entlang der Trajektorie muss die Geschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit übersteigen.
- $x^2 = 0$. x^μ ist ein lichtartiger Vektor. Ereignisse, deren Raumzeitdistanz voneinander lichtartig ist, können nur über Signale miteinander verknüpft werden, die immer mit Lichtgeschwindigkeit propagieren.

Wir heben noch hervor, dass $x^2 = 0$ nicht, wie für die räumliche Länge, impliziert, dass wir den Nullvektor betrachten: $\vec{x}^2 = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$, aber $x^2 = 0$ bedeutet nur, dass $(x^0)^2 = \vec{x}^2$.

Achtung, Konventionswarnung! Wenn die *Signatur* der Minkowski-Metrik (d.h., die Abfolge der Vorzeichen $-, +, +, +$ anders herum gewählt wird, also $\eta = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ ist, dann gilt, dass $x^2 > 0$ ein zeitartiger Vektor ist und $x^2 < 0$ ein raumartiger Vektor.

Ausblick: Diese Unterscheidung zwischen zeitartig, raumartig und lichtartig, wird in der Allgemeinen Relativitätstheorie weiterentwickelt und liegt der kausalen Struktur von Raumzeiten zugrunde, die z.B. Schwarze Löcher enthalten, oder die Entwicklung des Universums als Ganzes beschreiben.

3.2.5 Rechenregeln für Vierervektoren

Die Schreibweise für Vierervektoren über griechische Indizes braucht ein paar Regeln, um konsistent zu sein. Hier listen wir diese Regeln explizit auf:

- 1) Die Position von Indizes ist wichtig. Es gilt

$$x^\mu \neq x_\mu. \quad (108)$$

Wir nennen x^μ einen kontravarianten Vektor und x_μ einen kovarianten Vektor. Ihre $\mu = 0$ Komponente unterscheidet sich um ein Vorzeichen; die beiden sind *nicht* das gleiche Objekt.

- 2) Indizes können gehoben und gesenkt werden; das geschieht mit Hilfe von η

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu, \quad x_\kappa = \eta_{\kappa\mu} x^\mu. \quad (109)$$

- 3) Es gibt offene Indizes, die auf jeder Seite einer Gleichung nur einmal vorkommen. Diese Indizes werden nicht summiert. Sie müssen links und rechts identisch sein. Eine Gleichung mit einem offenen Index ist eine Vektorgleichung, d.h., sie ist eine kompakte Schreibweise für 4 Gleichungen in einem. (Es gilt natürlich auch die Verallgemeinerung: Mit einer Gleichung mit zwei offenen Indizes sparen wir uns die Schreibarbeit, 16 einzelne Gleichungen, eine für jede mögliche Wahl der beiden offenen Indizes, zu schreiben. Sie sehen schon, warum diese Schreibweise uns viel Arbeit spart...!).
- 4) Es gibt Summationsindizes (auch oft “dummy index” genannt), die summiert werden und für die wir (fast) immer die Einstein’sche Summenkonvention verwenden werden. In einer konsistenten Summation muss immer ein Index oben und einer unten sein, d.h.,

$$x^\mu x_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu. \quad (110)$$

Vorsicht, Summationsindizes nicht mehrfach verwenden. Es gilt

$$(x^2)^2 = (x_\mu x^\mu)^2 = x_\mu x^\mu x_\kappa x^\kappa \equiv \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\kappa=0}^3 x_\mu x^\mu x_\kappa x^\kappa \neq \sum_{\mu=0}^3 x_\mu x^\mu x_\mu x^\mu. \quad (111)$$

Ende VL 4.

Mini-Übung 9. Entscheiden Sie jeweils, welche Variante die Regeln richtig benutzt. (Betrachten Sie x , y , v , T usw einfach als unbekannte Variablen; es geht also nicht darum, sich zu überlegen, was eine Gleichung physikalisch bedeuten könnte und ob sie sinnvoll ist, sondern nur darum, zu entscheiden, ob die Benutzung der Indizes sinnvoll ist oder nicht.

Die entsprechenden Buchstaben ergeben einen sinnvollen Satz.

1)

$$\begin{aligned}x^\mu &= y^\mu \quad (T), \\x^\mu &= y_\mu \quad (N).\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}x^\mu x^\kappa v^\lambda &= y^\mu a^\lambda \quad (U), \\x^\mu x^\kappa v^\lambda &= y_\mu a^\lambda b^\kappa \quad (O).\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}x^\mu x^\kappa &= x^\mu x_\kappa \quad (N), \\x^\mu x^\kappa &= x^\mu x^\kappa \quad (L).\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}x^\mu \eta_{\mu\nu} &= x_\nu \quad (L), \\x^\mu \eta^{\mu\nu} &= x^\nu \quad (K).\end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned}x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\kappa &= x^\mu x^\kappa v_\nu \quad (E), \\x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\kappa &= v_\nu x^\kappa \quad (G).\end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned}x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\mu v_\mu &= 3x_\nu \quad (S), \\x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\kappa x_\kappa &= 3x_\nu \quad (E).\end{aligned}$$

7)

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu} T_{\mu\nu} &= 4 \quad (M), \\T^{\mu\nu} T^{\mu\nu} &= 4 \quad (C).\end{aligned}$$

8)

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu} A_{\mu\nu} &= 0 \quad (A), \\T^{\mu\nu} A_{\mu\nu} &= v^\mu \quad (H).\end{aligned}$$

9)

$$\begin{aligned} T^\mu_\nu \eta^{\nu\kappa} &= T^{\mu\kappa} \quad (C), \\ T^\mu_\nu \eta_\nu \kappa &= T^{\mu\kappa} \quad (O). \end{aligned}$$

10)

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} T^{\rho\sigma} \quad (N), \\ T_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} T^{\rho\sigma} \quad (H). \end{aligned}$$

11)

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\nu \Lambda^\nu_\kappa &= \eta_{\nu\kappa} \quad (N), \\ \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\lambda \Lambda^\nu_\kappa &= \eta_{\lambda\kappa} \quad (T). \end{aligned}$$

3.2.6 Lorentz-Gruppe

In Analogie zur Galilei-Gruppe, die wir am Anfang dieses Kapitels eingeführt haben, können wir jetzt die Lorentz-Gruppe einführen. Die Lorentz-Gruppe ist die Symmetriegruppe der sogenannten Minkowski-Raumzeit $\mathbb{R}^4$.

Um zu verstehen, wie die Gruppe aller Lorentz-Transformationen definiert ist, ist es hilfreich, zurückzugehen zur Gruppe $O(3)$ von räumlichen Rotationen. Wir haben ja schon gesehen, dass Lorentztransformationen, wenn sie über die Rapidität geschrieben werden, strukturell sehr ähnlich zu Rotationen sind. Wir hatten auch gesehen, dass die Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ die Verallgemeinerung der räumlichen Metrik δ_{ij} darstellt. Beides benutzen wir jetzt.

Die Gruppe $O(3)$ der Rotationsmatrizen R kann definiert werden über die räumliche Norm von Dreier-Vektoren:

$O(3)$ ist die Gruppe aller R , für die gilt:

$$(R\vec{x})^2 = \vec{x}^2, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (112)$$

Rotationsmatrizen sind also darüber definiert, dass der ursprüngliche und der rotierte Vektor die gleiche Länge haben müssen. Mit Hilfe der euklidischen Metrik δ_{ij} können wir schreiben:

$$\vec{x}^2 = x^i x^j \delta_{ij} \equiv \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x^i x^j \delta_{ij}, \quad (113)$$

$$= (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2, \quad (114)$$

wobei der letzte Term in der ersten Zeile uns daran erinnert, wie die Einstein'sche Summenkonvention für räumliche Indizes aussieht. Wenn wir die Schreibweise des Skalarprodukts über die Metrik jetzt in Glg. (112) benutzen, können wir schreiben:

$$(R\vec{x})^2 = \vec{x}^2, \quad (115)$$

$$\Leftrightarrow (R^i_k x^k) (R^j_l x^l) \delta_{ij} = x^k x^l \delta_{kl}, \quad (116)$$

$$\Leftrightarrow \delta_{ij} R^i_k R^j_l = \delta_{kl}. \quad (117)$$

(Wir heben hervor, dass wir die Summationsindizes immer beliebig umbenennen dürfen, so lange wir nicht einen Index benutzen, der schon einmal (also offener Index oder als Summationsindex) verwendet wird.)

Damit können wir also Rotationsmatrizen, und entsprechend die *Rotationsgruppe* $O(3)$ definieren über die euklidische Metrik δ_{ij} .

Wir bemerken noch, dass gilt

$$\delta_{ij} R^i_k R^j_l = \delta_{kl} \leftrightarrow R^T R = \mathbb{1}, \quad (118)$$

wobei eingeht, dass $\delta_{ij} R^i_k = (R^T)_k^i$ ist.

Jetzt können wir ganz analog die Lorentz Gruppe $O(1, 3)$ als Gruppe aller Λ mit

$$(\Lambda x)^2 = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^4, \quad (119)$$

definieren, wobei

$$(\Lambda x)^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (120)$$

gilt. Die Indexposition ist für Viererindizes entscheidend, denn es gilt

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu, \quad (121)$$

und damit gibt es zwischen x^μ und x_μ einen Vorzeichenwechsel in der $\mu = 0$ Komponente.

Λx ist jetzt der geboostete Vektor und wir fordern, dass seine Lorentzsche Norm invariant unter Boosts bleibt – ganz analog zu unserer Forderung bei räumlichen Rotationen. Also:

$$(\Lambda x)^\mu (\Lambda x)^\nu \eta_{\mu\nu} = x^\mu x^\nu \eta_{\mu\nu}. \quad (122)$$

Jetzt schreiben wir $(\Lambda x)^\mu$ aus und erhalten

$$\Lambda^\mu_\kappa x^\kappa \Lambda^\nu_\lambda x^\lambda \eta_{\mu\nu} = x^\mu x^\nu \eta_{\mu\nu}. \quad (123)$$

Wir können dies, unter Umbenennung der Summationsindizes auf der rechten Seite, schreiben als

$$\Lambda^\mu_\kappa x^\kappa \Lambda^\nu_\lambda x^\lambda \eta_{\mu\nu} = x^\kappa x^\lambda \eta_{\kappa\lambda}. \quad (124)$$

Damit haben wir jetzt eine analoge Form zu Glg. (116) und können, ähnlich wie oben im Schritt zu Glg. (117) folgern, dass

$$\boxed{\Lambda^\mu_\kappa \Lambda^\nu_\lambda \eta_{\mu\nu} = \eta_{\kappa\lambda}}. \quad (125)$$

Dies definiert die Gruppe der Lorentz-Transformationen, $O(1, 3)$, über die Minkowski-Metrik η .

Wir können diese Gleichung auch als Matrixgleichung schreiben in der Form

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad (126)$$

wobei $\Lambda^T \equiv \Lambda_\kappa^\mu$ gilt.

3.3 Verständnisfragen zu diesem Kapitel

Die folgenden Fragen zu den wichtigsten Ergebnissen in diesem Kapitel sollen Ihnen helfen, sich einen Überblick über den Stoff zu verschaffen und zu überprüfen, ob Sie die wichtigsten Konzepte verstanden haben oder in der Vorlesung/im Tutorium dazu noch Fragen stellen wollen.

Die Antworten zu diesen Fragen finden Sie im Skript.